# A MATEMÁTICA NO VESTIBULAR DO ITA

Sergio Lima Netto

Sergio Lima Netto

# A Matemática no Vestibular do ITA

Editora VestSeller
**Fortaleza - CE**
**1ª edição - 2013**

É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. Os transgressores serão punidos nos termos da lei. Denuncie plágio, cópias ilegais ou pirataria pela Internet, anonimamente, através dos endereços de correio eletrônico do autor:

**sergioln@smt.ufrj.br**
**sergiolimanetto@gmail.com**

Todos os direitos desta edição reservados a:
©2013 Sergio Lima Netto

Editor responsável: Sergio Lima Netto
Capa: Cleiton Maciel

Esta obra pode ser adquirida diretamente na
EDITORA VESTSELLER
através de sua página eletrônica *www.vestseller.com.br*

FICHA CATALOGRÁFICA: Preparada por
Sergio Lima Netto

N472m Netto, Sergio Lima.
A Matemática no Vestibular do ITA / Sergio Lima Netto. – Fortaleza: VestSeller, 2013.
XIV, 523f. : il.

ISBN: 978-85-60653-21-8

1. Matemática. 2. Vestibular. 3. ITA. I. Título.

CDD 510

## NOTA INTRODUTÓRIA

As soluções propostas para as provas de matemática do vestibular do ITA aqui incluídas são de responsabilidade única e exclusivamente do autor deste livro. Desta forma, estas soluções não possuem qualquer caráter oficial nem qualquer tipo de endosso por parte da Comissão Organizadora do Vestibular do ITA.

Você pode encontrar material complementar para este livro, incluindo novos enunciados e soluções além de um amplo material de Desenho Geométrico do vestibular do ITA, no site do autor:

**www.smt.ufrj.br/~sergioln/ita**

Se desejar, você pode entrar em contato com o autor através dos endereços eletrônicos:

**sergioln@smt.ufrj.br**
**sergiolimanetto@gmail.com**

# Índice

**Prefácio** ix

**Notações** xiii

**I Enunciados** 1

I.1 Vestibular 2013 . . . 3
I.2 Vestibular 2012 . . . 9
I.3 Vestibular 2011 . . . 14
I.4 Vestibular 2010 . . . 19
I.5 Vestibular 2009 . . . 25
I.6 Vestibular 2008 . . . 31
I.7 Vestibular 2007 . . . 36
I.8 Vestibular 2006 . . . 42
I.9 Vestibular 2005 . . . 47
I.10 Vestibular 2004 . . . 52
I.11 Vestibular 2003 . . . 57
I.12 Vestibular 2002 . . . 62
I.13 Vestibular 2001 . . . 68
I.14 Vestibular 2000 . . . 72
I.15 Vestibular 1999 . . . 77
I.16 Vestibular 1998 . . . 82
I.17 Vestibular 1997 . . . 87
I.18 Vestibular 1996 . . . 92
I.19 Vestibular 1995 . . . 98
I.20 Vestibular 1994 . . . 103
I.21 Vestibular 1993 . . . 108
I.22 Vestibular 1992 . . . 113
I.23 Vestibular 1991 . . . 119
I.24 Vestibular 1990 . . . 124
I.25 Vestibular 1989 . . . 131
I.26 Vestibular 1988 . . . 138
I.27 Vestibular 1987 . . . 146

I.28 Vestibular 1986 . . . 152
I.29 Vestibular 1985 . . . 156
I.30 Vestibular 1984 . . . 160
I.31 Vestibular 1983 . . . 164
I.32 Vestibular 1982 . . . 169
I.33 Vestibular 1981 . . . 172
I.34 Vestibular 1980 . . . 176
I.35 Vestibular 1979 . . . 179
I.36 Vestibular 1978 . . . 181
I.37 Vestibular 1977 . . . 186
I.38 Vestibular 1976 . . . 192
I.39 Vestibular 1975 . . . 198
I.40 Vestibular 1974 . . . 204
I.41 Vestibular 1973 . . . 209
I.42 Vestibular 1972 . . . 214
I.43 Vestibular 1971 . . . 219
I.44 Vestibular 1969 . . . 224
I.45 Vestibular 1968 . . . 230
I.46 Vestibular 1967 . . . 235
I.47 Vestibular 1959 . . . 239
I.48 Vestibular 1958 . . . 241
I.49 Vestibular 1957 . . . 242
I.50 Vestibular 1954 . . . 244
I.51 Vestibular 1951 . . . 245
I.52 Vestibular 1950 . . . 246

**II Soluções Propostas** **247**
II.1 Vestibular 2013 . . . 249
II.2 Vestibular 2012 . . . 264
II.3 Vestibular 2011 . . . 277
II.4 Vestibular 2010 . . . 291
II.5 Vestibular 2009 . . . 305
II.6 Vestibular 2008 . . . 318
II.7 Vestibular 2007 . . . 333
II.8 Vestibular 2006 . . . 347
II.9 Vestibular 2005 . . . 359
II.10 Vestibular 2004 . . . 372
II.11 Vestibular 2003 . . . 382
II.12 Vestibular 2002 . . . 396
II.13 Vestibular 2001 . . . 404
II.14 Vestibular 2000 . . . 411
II.15 Vestibular 1999 . . . 421
II.16 Vestibular 1998 . . . 430

II.17 Vestibular 1997 . . . . . 439
II.18 Vestibular 1996 . . . . . 449
II.19 Vestibular 1995 . . . . . 460
II.20 Vestibular 1994 . . . . . 469
II.21 Vestibular 1993 . . . . . 479
II.22 Vestibular 1992 . . . . . 489
II.23 Vestibular 1991 . . . . . 501
II.24 Vestibular 1990 . . . . . 511

**III Respostas Propostas** **521**
III.1 Anos 2010-2013 . . . . . 521
III.2 Anos 2000-2009 . . . . . 522
III.3 Anos 1990-1999 . . . . . 523

# Prefácio

Este livro tem data e hora de nascimento, ou, pelo menos, de concepção: "28 Dec 2011 17:00:37". Este é o registro da primeira mensagem que recebi de Alberto Colins me motivando a organizar o material. Tenho que confessar que a ideia já havia me passado pela cabeça, mas, na época, eu ainda me recuperava do processo de escrita de "A Matemática no Vestibular do IME", também publicado pela VestSeller, que havia durado seis anos.

Ainda num estágio inicial de preparação, passei as férias de janeiro de 2012 visitando diversos *sites* a procura das provas do ITA. Nesse sentido, crédito deve ser dado a inúmeras pessoas e entidades que disponibilizam gratuitamente boa parte do material que consegui coletar (alguns já desativados): Delta3, "Estude Mais", "Aluno Arretado", Colégios Etapa, Anglo, Objetivo e Elite, Caio Guimarães e toda equipe do grupo "Rumo ao ITA", Alex Fernandes (mais conhecido como "Sassabetudo"), além, é claro, da *homepage* do próprio ITA. Em alguns casos, porém, a gratuidade da Internet funciona como uma faca de dois gumes: ao mesmo tempo que muita informação é disponibilizada, nem sempre há a preocupação de tornar essa informação completa, organizada e confiável. Por isso mesmo, utilizei, ainda, três outras fontes de enunciados de provas: meu arquivo pessoal, os arquivos de meu colega e amigo Alessandro J. S. Dutra, e as contribuições inestimáveis do maior incentivador deste trabalho, Albert Colins, que obteve as provas mais antigas em sebos e livros.

Inúmeras outras tentativas foram feitas para complementar o material, mas, infelizmente, não consegui obter o enunciado de algumas provas. Considerando a fundação do ITA em 1950, podemos estimar 64 provas ocorridas até 2013 (inclusive), 52 das quais aqui incluídas, 24 das quais com soluções por mim propostas.

Por motivos de diagramação, não incluo neste livro o material de Desenho Geométrico. Para os interessados, disponibilizo os enunciados das provas e as respectivas soluções no *site* **www.smt.ufrj.br/~sergioln/ita**. Quem quiser entrar em contato comigo, para, por exemplo, enviar correções ou novos enunciados, pode usar os endereços **sergioln@smt.ufrj.br** ou **sergiolimanetto@gmail.com**.

Agradeço a todos que me ajudaram, direta ou mesmo indiretamente, na elaboração deste material. Em especial, agradeço a meus pais, de quem herdei a paixão pelos livros, e a Isabela, por preencher minha vida com muitas cores e acreditar em tudo que faço.

Rio de Janeiro, 17 de dezembro de 2012.

**Sergio Lima Netto**

*Como não poderia deixar de ser,*
*aos exercícios mais fascinantes:*
*Manuela, Renata e Bruno.*

# Notações

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$: conjunto dos números reais não-negativos
$\mathbb{R}_+^*$: conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}^*$: conjunto dos números reais não-nulos
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
$i$: unidade imaginária; $i^2 = -1$
$\overline{z}$: conjugado do número complexo $z$
$|z|$: módulo do número complexo $z$
$\arg z$: argumento principal do número complexo $z$; $\arg z \in [0, 2\pi[$
$\mathrm{Re}\, z$: parte real do número complexo $z$
$\mathrm{Im}\, z$: parte imaginária do número complexo $z$
$[a, b]$: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$[a, b) = [a, b[$: $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$(a, b] = ]a, b]$: $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
$(a, b) = ]a, b[$: $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$\emptyset$: conjunto vazio
$A \setminus B$: $\{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
$A^C$: complementar do conjunto $A$
$\mathcal{P}(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto $A$
$n(A)$: número de elementos do conjunto finito $A$

**Obs:** Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

| | |
|---|---|
| $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: | conjunto das matrizes reais $m \times n$ |
| $I_n$: | matriz identidade de ordem $n$ |
| det $A$: | determinante da matriz $A$ |
| $A^t$: | transposta da matriz $A$ |
| $A^{-1}$: | inversa da matriz inversível $A$ |
| tr $A$: | soma dos elementos da diagonal princial da matriz quadrada $A$ |
| $\overline{AB}$: | segmento de reta unindo os pontos $A$ e $B$ |
| $m(\overline{AB})$: | medida (comprimento) de $\overline{AB}$ |
| $A\hat{B}C$: | ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto $B$ |
| $\overset{\frown}{AB}$: | arco da circunferência de extremidades $A$ e $B$ |
| $f \circ g$: | função composta das funções $f$ e $g$ |
| $\binom{n}{p}$: | número de combinações de $n$ elementos tomados $p$ a $p$ |
| $A_{m,k}$: | número de arranjos simples de $m$ elementos tomados $k$ a $l$ |
| mdc $(j, k)$: | máximo divisor comum dos números inteiros $j$ e $k$ |
| $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ | $= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,\ n \in \mathbb{N}$ |

# Parte I

# Enunciados

| Ano | Prova | Ano | Prova |
|---|---|---|---|
| 2013 | X | 1981 | X |
| 2012 | X | 1980 | X |
| 2011 | X | 1979 | X |
| 2010 | X | 1978 | X |
| 2009 | X | 1977 | X |
| 2008 | X | 1976 | X |
| 2007 | X | 1975 | X |
| 2006 | X | 1974 | X |
| 2005 | X | 1973 | X |
| 2004 | X | 1972 | X |
| 2003 | X | 1971 | X |
| 2002 | X | 1970 | - |
| 2001 | X | 1969 | X |
| 2000 | X | 1968 | X |
| 1999 | X | 1967 | X |
| 1998 | X | 1966 | - |
| 1997 | X | 1965 | - |
| 1996 | X | 1964 | - |
| 1995 | X | 1963 | - |
| 1994 | X | 1962 | - |
| 1993 | X | 1961 | - |
| 1992 | X | 1960 | - |
| 1991 | X | 1959 | X* |
| 1990 | X | 1958 | X* |
| 1989 | X | 1957 | X* |
| 1988 | X | 1956 | - |
| 1987 | X | 1955 | - |
| 1986 | X | 1954 | X* |
| 1985 | X | 1953 | - |
| 1984 | X | 1952 | - |
| 1983 | X | 1951 | X* |
| 1982 | X | 1950 | X* |

*: Obtidos de M. Silva Filho e G. Magarinos, "Vestibulares de Matemática", Editora Nacionalista, 1960.

# I.1 Vestibular 2013

**Questão 01:** Sejam $A$, $B$ e $C$ subconjuntos de um conjunto universo $U$. Das afirmações:

I. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

II. $(A \cap C) \setminus B = A \cap B^C \cap C$;

III. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas I e II.
(D) apenas I e III. (E) todas.

**Questão 02:** A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 - 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

**Questão 03:** Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z - 5 + 3i)^4 = 1$. Se $z_0$ é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções. então o valor de $|z_0|$ é

(A) $\sqrt{29}$. (B) $\sqrt{41}$. (C) $3\sqrt{5}$. (D) $4\sqrt{3}$. (E) $3\sqrt{6}$.

**Questão 04:** A soma de todos os números reais $x$ que satisfazem a equação

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)$$

é igual a

(A) 8. (B) 12. (C) 16. (D) 18. (E) 20.

**Questão 05:** Se os números reais $a$ e $b$ satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5,$$

um possível valor de $\dfrac{a}{b}$ é

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (B) 1. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2. (E) $3\sqrt{2}$.

**Questão 06:** Considere as funções $f$ e $g$, da variável real $x$, definidas, respectivamente, por

$$f(x) = e^{x^2+ax+b} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right),$$

em que $a$ e $b$ são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta $g \circ f$ que

(A) $g \circ f(1) = \ln 3$.
(B) $\nexists\, g \circ f(0)$.
(C) $g \circ f$ nunca se anula.
(D) $g \circ f$ está definida apenas em $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
(E) $g \circ f$ admite dois zeros reais distintos.

**Questão 07:** Considere as funções $f, g, f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das afirmações:

I. Se $f$ e $g$ são injetoras, $f + g$ é injetora;
II. Se $f$ e $g$ são sobrejetoras, $f + g$ é sobrejetora;
III. Se $f$ e $g$ não são injetoras, $f + g$ não é injetora;
IV. Se $f$ e $g$ não são sobrejetoras, $f + g$ não é sobrejetora,

é (são) verdadeira(s)

(A) nenhuma. (B) apenas I e II. (C) apenas I e III.
(D) apenas III e IV. (E) todas.

**Questão 08:** Seja $n > 6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de $n^2$ por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de $n$ por 6 é

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

**Questão 09:** Considere a equação $\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = 0$ em que a soma das raízes é igual a $-2$ e os coeficientes $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ e $a_5$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com $a_0 = 1$. Então $\sum_{n=0}^{5} a_n$ é igual a

(A) $-21$. (B) $-\frac{2}{3}$. (C) $\frac{21}{32}$. (D) $\frac{63}{32}$. (E) 63.

**Questão 10:** Seja $\lambda$ solução real da equação $\sqrt{\lambda + 9} + \sqrt{2\lambda + 17} = 12$. Então a soma das soluções $z$, com $\mathrm{Re}\, z > 0$, da equação $z^4 = \lambda - 32$, é

(A) $\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $4\sqrt{2}$. (D) 4. (E) 16.

**Questão 11:** Seja $p$ uma probabilidade sobre um espaço amostral finito $\Omega$. Se $A$ e $B$ são eventos de $\Omega$ tais que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \setminus B$, $A \cup B$ e $A^C \cup B^C$ são, respectivamente.

(A) $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{6}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$. (E) $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

**Questão 12:** Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:

I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos;

II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos;

III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Pode-se afirmar que

(A) dos três resultados, I é o mais provável.
(B) dos três resultados, II é o mais provável.
(C) dos três resultados, III é o mais provável.
(D) os resultados I e II são igualmente prováveis.
(E) os resultados II e III são igualmente prováveis.

**Questão 13:** Considere $A \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de $\alpha$ é

(A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$. (C) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$. (D) 1. (E) $\sqrt{216}$.

**Questão 14:** Sejam $a$ um número real e $n$ o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x + 4\operatorname{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = \frac{1}{2}$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas III. (C) apenas I e III.
(D) apenas II e IV. (E) todas.

**Questão 15:** Se $\cos 2x = \frac{1}{2}$, então um possível valor de $\frac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cossec}(x-\pi) - \sec(\pi - x)}$ é

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) 1. (C) $\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{3}$. (E) 2.

**Questão 16:** Uma reta $r$ tangencia uma circunferência num ponto $B$ e intercepta uma reta $s$ num ponto $A$ exterior à circunferência. A reta $s$ passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto $C$, tal que o ângulo $ABC$ seja obtuso. Então o ângulo $CÂB$ é igual a

(A) $\frac{1}{2} A\hat{B}C$. (B) $\frac{3}{2}\pi - 2A\hat{B}C$. (C) $\frac{2}{3} A\hat{B}C$. (D) $2A\hat{B}C - \pi$. (E) $A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}$.

**Questão 17:** Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ pode-se afirmar que

(A) ela não admite reta tangente paralela ao eixo $Ox$.
(B) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo $Ox$.
(C) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo $Ox$.
(D) a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.
(E) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

**Questão 18:** Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

(A) III. (B) I e III. (C) II e III. (D) III e IV. (E) I, II e IV.

**Questão 19:** Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice $V$, determinando um triângulo $ABC$ cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm$^3$, do sólido $VABC$ é

(A) 2. (B) 4. (C) $\sqrt{17}$. (D) 6. (E) $5\sqrt{10}$.

**Questão 20:** No sistema $xOy$ os pontos $A = (2, 0)$, $B = (2, 5)$ e $C = (0, 1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

(A) 1. (B) $\frac{100}{105}$. (C) $\frac{10}{11}$. (D) $\frac{100}{115}$. (E) $\frac{5}{6}$.

**Problema 01:** Para $z = 1 + iy$, $y > 0$, determine todos os pares $(a, y)$, $a > 1$, tais que $z^{10} = a$. Escreva $a$ e $y$ em função de $\arg z$.

**Problema 02:** Determine o maior conjunto $D \subset \mathbb{R}$ da função

$$f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x(\frac{\pi}{4} - x)}(4 \operatorname{sen} x \cos x - 1).$$

**Problema 03:** Considere o polinômio $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in \mathbb{R}$ é tal que a soma das raízes de $P$ é igual a 3. Determine a raiz $m$ de $P$ tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em $x$, $x^3 + mx^2 + (m+4)x + 5 = 0$, estejam no intervalo $]-2, 2[$.

**Problema 04:** Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

**Problema 05:** Considere o sistema na variável real $x$:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta. \end{cases}$$

a) Determine os números reais $\alpha$ e $\beta$ para que o sistema admita somente soluções reais.

b) Para cada valor de $\beta$ encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$.

**Problema 06:** Considere o sistema nas variáveis reais $x$ e $y$:

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} \alpha + 3y \cos \alpha = a \\ x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = b. \end{cases}$$

com $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Analise para que valores de $\alpha$, $a$ e $b$ o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

**Problema 07:** Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \times ]0, \frac{\pi}{2}[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)\cos\alpha \operatorname{sen}\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1 \quad \text{e}$$
$$\sqrt{3}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}.$$

**Problema 08:** Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas

$$(y - x - 2)(y + \frac{x}{2} - 2) = 0 \quad \text{e} \quad x^2 - 2x + y^2 - 8 = 0.$$

**Problema 09:** Em um triângulo de vértices $A$, $B$ e $C$, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice $C$, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se $l$ é a medida do lado oposto ao vértice $C$, calcule:

a) A medida da mediana em função de $l$;

b) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

**Problema 10:** Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo de bases retangulares $ABCD$ e $EFGH$, em que $A$, $B$, $C$ e $D$ são, respectivamente, as projeções ortogonais de $E$, $F$, $G$ e $H$. As medidas das arestas distintas $AB$, $AD$ e $AE$ constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide $ABCF$ é igual a 10 cm$^3$. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo;

b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

# I.2 Vestibular 2012

**Questão 01:** Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

(A) 6. (B) 8. (C) 10. (D) 12. (E) 14.

**Questão 02:** Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

(A) $\frac{2}{9}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{4}{9}$. (D) $\frac{5}{9}$. (E) $\frac{2}{3}$.

**Questão 03:** Sejam $z = n^2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$ e $w = n(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$, em que $n$ é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

(A) $\sqrt{3}+i$. (B) $2(\sqrt{3}+i)$. (C) $2(\sqrt{2}+i)$. (D) $2(\sqrt{2}-i)$. (E) $2(\sqrt{3}-i)$.

**Questão 04:** Se $\arg z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é

(A) $-\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{2}$. (D) $\frac{3\pi}{4}$. (E) $\frac{7\pi}{4}$.

**Questão 05:** Sejam $r_1$, $r_2$ e $r_3$ números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se $r_1$ é racional ou $r_2$ é racional, então $r_3$ é racional;

II. Se $r_3$ é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;

III. Se $r_3$ é racional, então $r_1$ e $r_2$ são racionais,

é (são) sempre verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas III. (D) apenas I e II. (E) I, II e III.

**Questão 06:** As raízes $x_1$, $x_2$ e $x_3$ do polinômio $p(x) = 16 + ax - (1+\sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \quad e \quad x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

Então, o coeficiente $a$ é igual a

(A) $2(1-\sqrt{2})$. (B) $2(2+\sqrt{2})$. (C) $4(\sqrt{2}-1)$. (D) $4+\sqrt{2}$. (E) $\sqrt{2}-1$.

**Questão 07:** Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a $-127$. Então, o produto $xyz$ é igual a

(A) $60$. (B) $-30$. (C) $0$. (D) $30$. (E) $60$.

**Questão 08:** Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

(A) $5(5 - 2\sqrt{3})$.
(B) $15(5 - 2\sqrt{3})$.
(C) $30(5 - 2\sqrt{3})$.
(D) $45(5 - 2\sqrt{3})$.
(E) $50(5 - 2\sqrt{3})$.

**Questão 09:** Um triângulo $ABC$ tem lados com medidas $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b = 1$ cm e $c = \dfrac{1}{2}$ cm. Uma circunferência é tangente ao lado $a$ e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

(A) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (E) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$.

**Questão 10:** Sejam $A = (0, 0)$, $B = (0, 6)$ e $C = (4, 3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice $A$, em unidades de distância, é igual a

(A) $\dfrac{5}{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{97}}{3}$. (C) $\dfrac{\sqrt{109}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. (E) $\dfrac{10}{3}$.

**Questão 11:** A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r : x - 3y + 3 = 0$ e $s : 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a

(A) $\dfrac{19}{2}$. (B) $10$. (C) $\dfrac{25}{2}$. (D) $\dfrac{27}{2}$. (E) $\dfrac{29}{2}$.

**Questão 12:** Dados os pontos $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ e $C = (1, 1)$, o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d = 2$ da bissetriz interna, por $A$, do triângulo $ABC$ é um par de retas definidas por

(A) $r_{1,2} : \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0$.
(B) $r_{1,2} : \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$.
(C) $r_{1,2} : 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$.
(D) $r_{1,2} : (\sqrt{2} + 1)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0$.
(E) $r_{1,2} : (\sqrt{2} + 1)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0$.

**Questão 13:** Sejam $A$, $B$ e $C$ subconjuntos de um conjunto universo $U$. Das afirmações:

I. $(A \setminus B^C) \setminus C^C = A \cap (B \cup C)$;

II. $(A \setminus B^C) \setminus C = A \cup (B \cap C^C)^C$;

III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

(A) I. (B) II. (C) III. (D) I e III. (E) II e III.

**Questão 14:** Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não-vazios, tais que $n(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) + 1 = n(\mathcal{P}(A \cup B))$. Então, a diferença $n(A) - n(B)$ pode assumir

(A) um único valor.
(B) apenas dois valores distintos.
(C) apenas três valores distintos.
(D) apenas quatro valores distintos.
(E) mais do que quatro valores distintos.

**Questão 15:** Considere um número real $a \neq 1$ positivo, fixado, e a equação em $x$

$$a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0, \ \beta \in \mathbb{R}$$

Das afirmações:

I. Se $\beta < 0$, então existem duas soluções reais distintas;

II. Se $\beta = -1$, então existe apenas uma solução real;

III. Se $\beta = 0$, então não existem soluções reais;

IV. Se $\beta > 0$, então existem duas soluções reais distintas,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

(A) I. (B) I e III. (C) II e III. (D) II e IV. (E) I, III e IV.

**Questão 16:** Seja $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right) + \arccos\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right\}$.

Então,

(A) $S = \emptyset$. (B) $S = \{0\}$. (C) $S = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. (D) $S = \mathbb{R}^+$. (E) $S = \mathbb{R}$.

**Questão 17:** Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $\operatorname{tg}(x)$ são, respectivamente

(A) 1 e 0. (B) 1 e $\frac{5}{2}$. (C) $-1$ e 0. (D) 1 e 5. (E) $-1$ e $-\frac{5}{2}$.

**Questão 18:** A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

(A) $-\cos(\alpha)$ quando $n$ é par.
(B) $-\operatorname{sen}(\alpha)$ quando $n$ é ímpar.
(C) $\cos(\alpha)$ quando $n$ é ímpar.
(D) $\operatorname{sen}(\alpha)$ quando $n$ é par.
(E) zero quando $n$ é ímpar.

**Questão 19:** Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{1/3}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{2}{3}$. (E) $\frac{3}{4}$.

**Questão 20:** A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120° e área igual a $3\pi$ cm². A área total e o volume deste cone medem, em cm² e cm³, respectivamente

(A) $4\pi$ e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.
(B) $4\pi$ e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.
(C) $4\pi$ e $\pi\sqrt{2}$.
(D) $3\pi$ e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.
(E) $\pi$ e $2\pi\sqrt{2}$.

**Problema 01:** Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

**Problema 02:** Determine os valores reais de $x$ de modo que $\operatorname{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

**Problema 03:** Considere uma matriz quadrada $A$ em que os termos da diagonal principal são $1+x_1, 1+x_2, \ldots, 1+x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz $A$ para que o seu determinante seja igual a 256.

**Problema 04:** Seja $n$ um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine $n$ e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa $A^{-1}$.

**Problema 05:** Em um plano estão situados uma circunferência $\omega$ de raio 2 cm e um ponto $P$ que dista $2\sqrt{2}$ cm do centro de $\omega$. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a $\omega$ nos pontos $A$ e $B$, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor $\overset{\frown}{AB}$ em torno de um eixo passando pelo centro de $\omega$ e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

a) A área total da superfície deste sólido.

b) O volume do sólido.

**Problema 06:** As interseções das retas $r: x - 3y + 3 = 0$, $s: x + 2y - 7 = 0$ e $t: x + 7y - 7 = 0$, duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

a) A área total da superfície do prisma.

b) O volume do prisma.

**Problema 07:** Dos $n$ alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine $n$.

**Problema 08:** Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Problema 09:** Determine os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que $\log_{\operatorname{tg}(\theta)} e^{\operatorname{sen}(\theta)} \geq 0$.

**Problema 10:** As retas $r_1$ e $r_2$ são concorrentes no ponto $P$, exterior a um círculo $\omega$. A reta $r_1$ tangencia $\omega$ no ponto $A$ e a reta $r_2$ intercepta $\omega$ nos pontos $B$ e $C$ diametralmente opostos. A medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ é 60° e $\overline{PA}$ mede $\sqrt{2}$ cm. Determine a área do setor menor de $\omega$ definido pelo arco $\overset{\frown}{AB}$.

## I.3 Vestibular 2011

**Questão 01:** Dado $z = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

(A) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}i$. (B) $-1$. (C) $0$. (D) $1$. (E) $\frac{89}{6}\sqrt{3}i$.

**Questão 02:** Das afirmações abaixo sobre números complexos $z_1$ e $z_2$:

I. $|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$;

II. $|\overline{z_1}.z_2| = ||\overline{z_2}|.|\overline{z_2}||$;

III. Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \neq 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)$,

é (são) sempre verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas III. (D) apenas II e III. (E) todas.

**Questão 03:** A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$ : $z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$ é igual a

(A) 2. (B) $\frac{i}{2}$. (C) 0. (D) $-\frac{1}{2}$. (E) $-2i$.

**Questão 04:** Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

(A) $\frac{7}{8}$. (B) $\frac{5}{7}$. (C) $\frac{5}{8}$. (D) $\frac{3}{5}$. (E) $\frac{3}{7}$.

**Questão 05:** Sejam $A$ e $B$ conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

I. $n(B) - n(A)$ é único;

II. $n(B) + n(A) \leq 128$;

III. a dupla ordenada $(n(A), n(B))$ é única,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas III. (D) apenas I e II. (E) nenhuma.

**Questão 06:** O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases}$

(A) é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

(B) é possível quando $a = \dfrac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

(C) é impossível quando $c = 1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

(D) é impossível quando $a \neq \dfrac{7b}{3}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

(E) é possível quando $c = 1$ e $a \neq \dfrac{7b}{3}$.

**Questão 07:** Considere as afirmações abaixo:

I. Se $M$ é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula $N$, de mesma ordem, tal que $MN$ é matriz nula;

II. Se $M$ é uma matriz quadrada inversível de ordem $n$ tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não-nula $X$, de ordem $n \times 1$, tal que $MX = X$;

III. A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é (são) verdadeira(s)

(A) apenas II. (B) apenas I e II. (C) apenas I e III. (D) apenas II e III. (E) todas.

**Questão 08:** Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^2$ é igual a

(A) $-64$. (B) $-36$. (C) $-28$. (D) 18. (E) 27.

**Questão 09:** O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a

(A) $-5$. (B) $-1$. (C) 1. (D) 2. (E) 5.

**Questão 10:** Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3}(x - a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que $x = 0$ é uma das raízes e que $(a_1, a_2, a_3)$ é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que

(A) a soma de todas as raízes é 5.
(B) o produto de todas as raízes é 21.
(C) a única raiz real é maior que zero.
(D) a soma das raízes não reais é 10.
(E) todas as raízes são reais.

**Questão 11:** A expressão $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^{x} - 54e^{y} + 61 = 0$, com $x$ e $y$ reais, representa

(A) o conjunto vazio.
(B) um conjunto unitário.
(C) um conjunto não-unitário com um número finito de pontos.
(D) um conjunto com um número infinito de pontos.
(E) o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2(e^x - 2)^2 + 3(e^y - 3)^2 = 1\}$.

**Questão 12:** Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que

(A) todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.
(B) uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
(C) duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não-nula.
(D) não é divisível por $2x - 1$.
(E) uma única raiz está em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Questão 13:** Sejam $m$ e $n$ inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio $r = 1$ cm e centro $C$ localizado no segundo quadrante. Se $A$ e $B$ são os pontos onde a circunferência cruza o eixo $Oy$, a área do triângulo $ABC$, em cm$^2$, é igual a

(A) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. (C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. (E) $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

**Questão 14:** Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

(A) $\frac{23}{11}\pi$. (B) $\frac{13}{6}\pi$. (C) $\frac{24}{11}\pi$. (D) $\frac{25}{11}\pi$. (E) $\frac{7}{3}\pi$.

**Questão 15:** Seja $ABC$ um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se $D$ é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo $ADC$ é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

(A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{15}{6}$. (C) $\frac{15}{4}$. (D) $\frac{25}{4}$. (E) $\frac{25}{2}$.

**Questão 16:** Sejam $ABCD$ um quadrado e $E$ um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado $ABCD$, do trapézio $BEDC$ e do triângulo $ADE$. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm$^2$, a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a

(A) $\frac{10}{3}$. (B) 5. (C) $\frac{20}{3}$. (D) $\frac{25}{3}$. (E) 10.

**Questão 17:** Num triângulo $ABC$ o lado $\overline{AB}$ mede 2 cm, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 1 cm, o ângulo $A\hat{B}C$ mede $135°$ e $M$ é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então a medida de $B\hat{A}C + B\hat{M}C$, em radianos, é igual a

(A) $\frac{1}{5}\pi$. (B) $\frac{1}{4}\pi$. (C) $\frac{1}{3}\pi$. (D) $\frac{3}{8}\pi$. (E) $\frac{2}{5}\pi$.

**Questão 18:** Um triângulo $ABC$ está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto $D$. Se $\alpha$ é a soma das áreas dos triângulos $ABC$ e $ABD$ e $\beta$ é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm$^2$, é igual a

(A) 14. (B) 15. (C) 16. (D) 17. (E) 18.

**Questão 19:** Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

(A) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$. (B) $\frac{13}{3}$. (C) $\frac{15}{4}$. (D) $2\sqrt{3}$. (E) $\frac{10}{3}$.

**Questão 20:** Considere as afirmações:

I. Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida $\alpha = 120°$;
II. Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, $30°$, $45°$, $50°$, $50°$ e $170°$;
III. Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices;
IV. A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é $2880°$.

Destas, é (são) correta(s) apenas

(A) II. (B) IV. (C) II e IV. (D) I, II e IV. (E) II, III e IV.

**Problema 01:** Analise a existência de conjuntos $A$ e $B$, ambos não-vazios, tais que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$.

**Problema 02:** Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, com $i \neq j$, distintos entre si.

**Problema 03:** Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

**Problema 04:** Resolva a inequação em $\mathbb{R}$: $16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}(x^2-x+19)}$.

**Problema 05:** Determine todas as matrizes $M \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM, \forall N \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

**Problema 06:** Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2-m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

**Problema 07:** Considere uma esfera $\Omega$ com centro em $C$ e raio $r = 6$ cm e um plano $\Sigma$ que dista 2 cm de $C$. Determine a área da interseção do plano $\Sigma$ com uma cunha esférica de $30^\circ$ em $\Omega$ que tenha aresta ortogonal a $\Sigma$.

**Problema 08:**

a) Calcule $(\cos^2 \frac{\pi}{5} - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{5}) \cos \frac{\pi}{10} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}$.

b) Usando o resultado do item anterior, calcule $\operatorname{sen} \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}$.

**Problema 09:** Num triângulo $AOB$ o ângulo $A\hat{O}B$ mede $135^\circ$ e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ medem $\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm, respectivamente. A circunferência de centro em $O$ e raio igual à medida de $\overline{OB}$ intercepta $\overline{AB}$ no ponto $C (\neq B)$.

a) Mostre que $O\hat{A}B$ mede $15^\circ$.

b) Calcule o comprimento de $\overline{AC}$.

**Problema 10:** Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}$ cm. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio $r$. O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

a) Determine o valor de $r$.

b) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

c) Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.

# I.4 Vestibular 2010

**Questão 01:** Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos $A$, $B$ e $C$ quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$;

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

III. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas III. (D) apenas I e III. (E) nenhuma.

**Questão 02:** Considere conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ e $C \subset (A \cup B)$. Se $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são os domínios das funções reais definidas por $\ln(x - \sqrt{\pi})$, $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $\sqrt{\dfrac{x - \pi}{5 - x}}$, respectivamente, pode-se afirmar que

(A) $C = ]\sqrt{\pi}, 5]$.
(B) $C = [2, \pi]$.
(C) $C = [2, 5[$.
(D) $C = [\pi, 4]$.
(E) $C$ não é intervalo.

**Questão 03:** Se $z$ é uma solução da equação em $\mathbb{C}$,

$$z - \bar{z} + |z|^2 = -\left[\left(\sqrt{2} + i\right)\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{3} - i\frac{\sqrt{2} + 1}{3}\right)\right]^{12}.$$

pode-se afirmar que

(A) $i(z - \bar{z}) < 0$.
(B) $i(z - \bar{z}) > 0$.
(C) $|z| \in [5, 6]$.
(D) $|z| \in [6, 7]$.
(E) $\left|z + \frac{1}{z}\right| > 8$.

**Questão 04:** Os argumentos principais das soluções da equação em $z$,

$$iz + 3\bar{z} + (z + \bar{z})^2 - i = 0.$$

pertencem a

(A) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$. (B) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$. (C) $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

(D) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[$. (E) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[ \cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

**Questão 05:** Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_{50})$ de razão $d$. Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

(A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 11. (E) 14.

**Questão 06:** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f$ é par e $g$ é ímpar. Das seguintes afirmações:

I. $f.g$ é ímpar;
II. $f \circ g$ é par;
III. $g \circ f$ é ímpar,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas III. (D) apenas I e II. (E) todas.

**Questão 07:** A equação em $x$,

$$\operatorname{arc\,tg}(e^x + 2) - \operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x} - 1}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(A) admite infinitas soluções, todas positivas.
(B) admite uma única solução, e esta é positiva.
(C) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right[$.
(D) admite apenas soluções negativas.
(E) não admite solução.

**Questão 08:** Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^4 + ax^2 - 1$, $a \in \mathbb{R}$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de $p$:

I. Quatro das raízes são imaginárias puras;
II. Uma das raízes tem multiplicidade dois;
III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas

(A) I. (B) II. (C) III. (D) I e III. (E) II e III.

**Questão 09:** Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, $a$, $b$ e $c$, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}.$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que $p(1)$ é igual a

(A) $-4$. (B) $-2$. (C) 2. (D) 4. (E) 6.

**Questão 10:** Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + ia_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots, 15$. Das afirmações:

I. $p(-1) \notin \mathbb{R}$;

II. $|p(x)| \leq 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$, $\forall x \in [-1, 1]$;

III. $a_5 = a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

(A) I. (B) II. (C) III. (D) I e II. (E) II e III.

**Questão 11:** A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a

(A) $2630\sqrt{5}$. (B) $2690\sqrt{5}$. (C) $2712\sqrt{5}$. (D) $1584\sqrt{15}$. (E) $1604\sqrt{15}$.

**Questão 12:** Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente é igual a

(A) $\frac{16}{27}$. (B) $\frac{49}{81}$. (C) $\frac{151}{243}$. (D) $\frac{479}{729}$. (E) $\frac{2^4}{3^4} + \frac{2^5}{3^5}$.

**Questão 13:** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4 = 10$, $\det A = -1000$ e $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$ e $a_6$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $d > 0$. Pode-se afirmar que $\frac{a_1}{d}$ é igual a

(A) $-4$. (B) $-3$. (C) $-2$. (D) $-1$. (E) 1.

**Questão 14:** Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

sabe-se que $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ são duas progressões geométricas de razões 3 e 4 e de somas 80 e 255, respectivamente. Então, $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

(A) $\frac{1}{72}$ e 12. (B) $-\frac{1}{72}$ e $-12$. (C) $-\frac{1}{72}$ e 12. (D) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$. (E) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.

**Questão 15:** O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

(A) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$. (B) $\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$.

(C) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$. (D) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$.

(E) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha$.

**Questão 16:** Se os números reais $\alpha$ e $\beta$, com $\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$, $0 \le \alpha \le \beta$, maximizam a soma $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$, então $\alpha$ é igual a

(A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{2\pi}{3}$. (C) $\frac{3\pi}{5}$. (D) $\frac{5\pi}{8}$. (E) $\frac{7\pi}{12}$.

**Questão 17:** Considere as circunferências $C_1 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ e $C_2 : (x-10)^2 + (y-11)^2 = 9$. Seja $r$ uma reta tangente interna a $C_1$ e $C_2$, isto é, $r$ tangencia $C_1$ e $C_2$ e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros $O_1$ de $C_1$ e $O_2$ de $C_2$. Os pontos de tangência definem um segmento sobre $r$ que mede

(A) $5\sqrt{3}$. (B) $4\sqrt{5}$. (C) $3\sqrt{6}$. (D) $\frac{25}{3}$. (E) 9.

**Questão 18:** Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, o volume do cilindro, em $\text{cm}^3$, é igual a

(A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. (C) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$. (D) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$. (E) $\frac{\pi}{3}$.

**Questão 19:** Um triângulo equilátero tem os vértices nos pontos $A$, $B$ e $C$ do plano $xOy$, sendo $B = (2, 1)$ e $C = (5, 5)$. Das seguintes afirmações:

I. $A$ se encontra sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$;

II. $A$ está na interseção da reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$;

III. $A$ pertence às circunferências $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ e $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{75}{4}$,

é (são) verdadeira(s) apenas

(A) I. (B) II. (C) III. (D) I e II. (E) II e III.

**Questão 20:** Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se $M$ é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e $N$ é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo $MND$, em cm$^2$, é igual a

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. (E) $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

**Problema 01:** Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B \setminus C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.

a) Determine $n(C)$.

b) Determine $n(\mathcal{P}(B \setminus C))$.

**Problema 02:** A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1, a_6, \ldots, a_{5n+1}, \ldots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5, a_{10}, \ldots, a_{5n}, \ldots)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

**Problema 03:** Analise se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa $f^{-1}$.

**Problema 04:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é ímpar.

**Problema 05:** Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{6} a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se $r$ é raiz de $p$, $-r$ também é raiz de $p$. Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

I. Se $r_1$ e $r_2$, $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e $r_3$ é raiz não real de $p$, então $r_3$ é imaginário puro;

II. Se $r$ é raiz dupla de $p$, então $r$ é real ou imaginário puro;

III. $a_0 < 0$.

**Problema 06:** Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser múltiplo de 5 ou de 6.

b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6.

**Problema 07:** Considere as matrizes $A \in \mathbb{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$ e $X, B \in \mathbb{M}_{4\times1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre todos os valores reais de $a$ e $b$ tais que a equação matricial $AX = B$ tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1\ 1\ 2\ 4]^t$, encontre $X$ tal que $AX = B$.

**Problema 08:** Considere a equação $(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$.

a) Determine todas as soluções $x$ no intervalo $[0, \pi[$.

b) Para as soluções encontradas em a), determine $\operatorname{cotg} x$.

**Problema 09:** Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são $A = (1, 1)$, $B = (1, 7)$ e $C = (5, 4)$ no plano $xOy$.

**Problema 10:** As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $\frac{3}{2}$ cm, respectivamente, calcule:

a) A distância entre os centros das duas esferas.

b) A área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

# I.5 Vestibular 2009

**Questão 01:** Sejam $A$ e $B$ subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \setminus B = \{d, e\}$, então, $n(\mathcal{P}(A \cap B))$ é igual a

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4. (E) 8.

**Questão 02:** Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor "flex" (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor "flex" sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

(A) 246. (B) 252. (C) 260. (D) 268. (E) 284.

**Questão 03:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma função satisfazendo as condições:

$f(x + y) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(x) \neq 1$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Das afirmações:

I. $f$ pode ser ímpar;
II. $f(0) = 1$;
III. $f$ é injetiva;
IV. $f$ não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

é (são) falsa(s) apenas

(A) I e III. (B) II e III. (C) I e IV. (D) IV. (E) I.

**Questão 04:** Se $a = \cos\frac{\pi}{5}$ e $b = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$, então, o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

(A) $a + bi$.
(B) $-a + bi$.
(C) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$.
(D) $a - bi$.
(E) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

**Questão 05:** O polinômio de grau 4

$$(a+2b+c)x^4+(a+b+c)x^3-(a-b)x^2+(2a-b+c)x+2(a+c),$$

com $a,b,c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

(A) $3+\sqrt{3}$. (B) $2+3\sqrt{3}$. (C) $2+\sqrt{2}$. (D) $1+2\sqrt{2}$. (E) $2+2\sqrt{2}$.

**Questão 06:** Considere as funções $f(x)=x^4+2x^3-2x-1$ e $g(x)=x^2-2x+1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f\circ g$ é igual a

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

**Questão 07:** Suponha que os coeficientes reais $a$ e $b$ da equação $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ são tais que a equação admite solução não real $r$ com $|r|\neq 1$. Das seguintes afirmações:

I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais;

II. As raízes podem ser duplas;

III. Das quatro raízes, duas podem ser reais,

é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas II. (C) apenas III. (D) apenas II e III. (E) nenhuma.

**Questão 08:** Se as soluções da equação algébrica $2x^3-ax^2+bx+54=0$, com coeficientes $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\dfrac{a}{b}$ é igual a

(A) $-3$. (B) $-\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) 1. (E) 3.

**Questão 09:** Dados $A\in\mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $b\in\mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0\in\mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX=b$ quando $\sqrt{(AX_0-b)^t(AX_0-b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a sua melhor aproximação quadrática é

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (E) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**Questão 10:** O sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad a_1, a_2, b_2, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

com $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é

(A) determinado.
(B) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.
(C) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
(D) impossível.
(E) indeterminado.

**Questão 11:** Seja $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que $a_{11}$, $a_{12}$ e $a_{22}$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $a_{11} = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

(A) $\frac{101}{25}$. (B) $\frac{121}{25}$. (C) 5. (D) $\frac{49}{9}$. (E) $\frac{25}{4}$.

**Questão 12:** Um certo exame de inglês é utilizado para classificar a proficiência de estrangeiros nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% são bem avaliados neste exame. Entre os não proficientes em inglês, 7% são eventualmente bem avaliados. Considere uma amostra de estrangeiros em que 18% são proficientes em inglês. Um estrangeiro, escolhido desta amostra ao acaso, realizou o exame sendo classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

(A) 73%. (B) 70%. (C) 68%. (D) 65%. (E) 64%.

**Questão 13:** Considere o triângulo $ABC$ de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite $c$ como raiz dupla, pode-se afirmar que

(A) $\alpha = 90°$.
(B) $\beta = 60°$.
(C) $\gamma = 90°$.
(D) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45°$.
(E) O triângulo é retângulo e $b$ é hipotenusa.

**Questão 14:** No plano, considere $S$ o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta $t : x = 1$ e ao ponto $A = (3, 2)$ é igual a 4. Então, $S$ é

(A) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(2, 1)$.
(B) uma circunferência de raio 1 e centro $(1, 2)$.
(C) uma hipérbole.
(D) uma elipse de eixos de comprimentos $2\sqrt{2}$ e 2.
(E) uma elipse de eixos de comprimentos 2 e 1.

**Questão 15:** Do triângulo de vértices $A$, $B$ e $C$, inscrito em uma circunferência de raio $R = 2$ cm, sabe-se que o lado $\overline{BC}$ mede 2 cm e o ângulo interno $A\hat{B}C$ mede $30°$. Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em cm, igual a

(A) $2 - \sqrt{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $2\sqrt{3} - 3$. (E) $\frac{1}{2}$.

**Questão 16:** A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a

(A) 2. (B) $\frac{3}{2}$. (C) 1. (D) $\frac{3}{4}$. (E) $\frac{1}{2}$.

**Questão 17:** A expressão

$$\frac{2\left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{11}{2}\pi\right) + \operatorname{cotg}^2 x\right] \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

é equivalente a

(A) $(\cos x - \operatorname{sen}^2 x)\operatorname{cotg} x$.
(B) $(\operatorname{sen} x + \cos x)\operatorname{tg} x$.
(C) $(\cos^2 x - \operatorname{sen} x)\operatorname{cotg}^2 x$.
(D) $(1 - \operatorname{cotg}^2 x)\operatorname{sen}^2 x$.
(E) $(1 + \operatorname{cotg}^2 x)(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

**Questão 18:** Sejam $C$ uma circunferência de raio $R > 4$ e centro $(0, 0)$ e $\overline{AB}$ uma corda de $C$. Sabendo que $(1, 3)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, então uma equação da reta que contém $\overline{AB}$ é

(A) $y + 3x - 6 = 0$.
(B) $3y + x - 10 = 0$.
(C) $2y + x - 7 = 0$.
(D) $y - x - 4 = 0$.
(E) $2y + 3x - 9 = 0$.

**Questão 19:** Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8 cm de altura e de $60°$ de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}$ cm do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em $cm^3$, é igual a

(A) $\frac{416}{9}\pi$. (B) $\frac{480}{9}\pi$. (C) $\frac{500}{9}\pi$. (D) $\frac{512}{9}\pi$. (E) $\frac{542}{9}\pi$.

**Questão 20:** Os pontos $A = (3, 4)$ e $B = (4, 3)$ são vértices de um cubo, em que $\overline{AB}$ é uma das arestas. A área lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médios da face do cubo é igual a

(A) $\sqrt{8}$. (B) 3. (C) $\sqrt{12}$. (D) 4. (E) $\sqrt{18}$.

**Problema 01:** Seja $S$ o conjunto solução da inequação

$$(x - 9)\left|\log_{x+4}(x^3 - 26x)\right| \leq 0.$$

Determine o conjunto $S^C$.

**Problema 02:** Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $w = x^2(1 + 3i) - y^2(4 - i) - x(2 + 6i) + y(-16 + 4i) \in \mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \mathrm{Re}\, w \leq -13 \text{ e } \mathrm{Im}\, w \leq 4\}.$$

**Problema 03:** Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$.

a) Mostre que $f$ é injetora.

b) Determine $D = \{f(x);\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ e $f^{-1} : D \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

**Problema 04:** Suponha que a equação algébrica

$$x^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0$$

tenha coeficientes reais $a_0, a_1, \ldots, a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que $\beta, \gamma_n \in \mathbb{R}$ e os $\gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots, 11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$;

II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$;

III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

**Problema 05:** Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem a nota para participar da segunda etapa?

**Problema 06:** Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se $AX$ é a matriz coluna nula, para todo $X \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, então $A$ é a matriz nula.

b) Se $A$ e $B$ são não nulas e tais que $AB$ é a matriz nula, então $\det A = \det B = 0$.

**Problema 07:** Sabendo que $\operatorname{tg}^2\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$, para algum $x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$, determine $\operatorname{sen} x$.

**Problema 08:** Dadas a circunferência $C : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 20$ e a reta $r : 3x - y + 5 = 0$, considere a reta $t$ que tangencia $C$, forma um ângulo de $45°$ com $r$ e cuja distância à origem é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação da reta $t$.

**Problema 09:** Considere as $n$ retas

$$r_i : y = m_i x + 10,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ n \geq 5,$$

em que os coeficientes $m_i$, em ordem crescente de $i$, formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta $r_5$ tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de $q$.

**Problema 10:** A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida $a$ do apótema da base.

# I.6 Vestibular 2008

**Questão 01:** Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0.25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

(A) $\frac{1}{21}$. (B) $\frac{1}{8}$. (C) $\frac{3}{21}$. (D) $\frac{5}{21}$. (E) $\frac{1}{4}$.

**Questão 02:** Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

(A) $-2$. (B) $0$. (C) $1$. (D) $2$. (E) $2i$.

**Questão 03:** Considere o sistema $Ax = b$, em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Sendo $T$ a soma de todos os valores de $k$ que tornam o sistema impossível e sendo $S$ a soma de todos os valores de $k$ que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T - S$ é

(A) $-4$. (B) $-3$. (C) $0$. (D) $1$. (E) $4$.

**Questão 04:** Sejam $A$ e $C$ matrizes $n \times n$ inversíveis tais que $\det(I + C^{-1}A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de $B$ é igual a

(A) $3^n$. (B) $2.\frac{3^n}{5^2}$. (C) $\frac{1}{5}$. (D) $\frac{3^{n-1}}{5}$. (E) $5.3^{n-1}$.

**Questão 05:** Um polinômio $P$ é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de $P$ é 62, então o de maior grau tem grau igual a

(A) 30. (B) 32. (C) 34. (D) 36. (E) 38.

**Questão 06:** Um diedro mede $120°$. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi$ cm$^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

(A) $3\sqrt{3}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{2}$. (E) $2$.

**Questão 07:** Considere o quadrado $ABCD$ com lados de 10 m de comprimento. Seja $M$ um ponto sobre lado $\overline{AB}$ e $N$ um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, equidistantes de $A$. Por $M$ traça-se uma reta $r$ paralela ao lado $\overline{AD}$ e por $N$ uma reta $s$ paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto $O$. Considere os quadrados $AMON$ e $OPCQ$, onde $P$ é a intersecção de $s$ com o lado $\overline{BC}$ e $Q$ é a intersecção de $r$ com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados $AMON$, $OPCQ$ e $ABCD$ constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos $A$ e $M$ é igual, em metros, a

(A) $15-5\sqrt{5}$. (B) $10+5\sqrt{5}$. (C) $10-\sqrt{5}$. (D) $15-5\sqrt{5}$. (E) $10-3\sqrt{5}$.

**Questão 08:** Considere o polinômio $p(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2-a_1$, em que uma das raizes é $x=-1$. Sabendo-se que $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ e $a_5$ são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4=1/2$, então $p(-2)$ é igual a

(A) $-25$. (B) $-27$. (C) $-36$. (D) $-39$. (E) $-40$.

**Questão 09:** Sobre a equação polinomial $2x^4+ax^3+bx^2+cx-1=0$, sabemos que os coeficientes $a,b,c$ são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $1/2-i/2$ também é sua raiz. Então, o máximo de $a,b,c$ é igual a

(A) $-1$. (B) $1$. (C) $2$. (D) $3$. (E) $4$.

**Questão 10:** É dada a equação polinomial

$$(a+c+2)x^3+(b+3c+1)x^2+(c-a)x+(a+b+4)=0$$

com $a,b,c$ reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto $abc$ é igual a

(A) $-2$. (B) $4$. (C) $6$. (D) $9$. (E) $12$.

**Questão 11:** Sendo $[-\pi/2,\pi/2]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0,\pi]$ o contradomínio da função arcocosseno, assinale o valor de

$$\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}+\operatorname{arc\,cos}\frac{4}{5}\right).$$

(A) $\frac{1}{\sqrt{12}}$. (B) $\frac{7}{25}$. (C) $\frac{4}{15}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{15}}$. (E) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

**Questão 12:** Dada a cônica $\lambda : x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular a $\lambda$ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

(A) $y = \sqrt{3}(x-1)$. (B) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. (C) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$.

(D) $y = \frac{-\sqrt{3}}{5}(x-7)$. (E) $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}(x-1)$.

**Questão 13:** O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2\operatorname{sen}^2(3x) + \operatorname{sen}(6x) - 1$ são, respectivamente,

(A) $[-3,3]$ e $2\pi$. (B) $[-2,2]$ e $\frac{2\pi}{3}$. (C) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$.

(D) $[-1,3]$ e $\frac{\pi}{3}$. (E) $[-1,3]$ e $\frac{2\pi}{3}$.

**Questão 14:** Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução de $|5^{3x} - 5^{2x+1} - 4.5^x| = |5^x - 1|$ é

(A) $\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\}$.

(B) $\{0, 1, \log_5(2+\sqrt{5})\}$.

(C) $\left\{0, \frac{1}{2}\log_5 2, \frac{1}{2}\log_5 3, \log_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

(D) $\{0, \log_5(2+\sqrt{3}), \log_5(2+\sqrt{3}), \log_5(2-\sqrt{3})\}$.

(E) A única solução é $x = 0$.

**Questão 15:** Um subconjunto $D$ de $\mathbb{R}$ tal que a função $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |\ln(x^2 - x + 1)|$ é injetora, é dado por

(A) $\mathbb{R}$. (B) $(-\infty, 1]$. (C) $[0, 1/2]$. (D) $(0,1)$. (E) $[1/2, \infty)$.

**Questão 16:** A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0,$$

que estão no intervalo $0 < x \leq \pi/2$, é igual a

(A) $2\pi$. (B) $\frac{23}{12}\pi$. (C) $\frac{9}{6}\pi$. (D) $\frac{7}{6}\pi$. (E) $\frac{13}{12}\pi$.

**Questão 17:** Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 365\}$ e $H = \mathcal{P}(D)$ formado por todos os subconjuntos de $D$ com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a

(A) $\frac{1}{730}$. (B) $\frac{16}{33\,215}$. (C) $\frac{1}{365}$. (D) $\frac{92}{33\,215}$. (E) $\frac{91}{730}$.

**Questão 18:** Considere o triângulo $ABC$ isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede $40^\circ$. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto $E$ tal que $ACE = 15^\circ$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto $D$ tal que $D\hat{B}C = 35^\circ$. Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale

(A) $45^\circ$. (B) $45^\circ$. (C) $55^\circ$. (D) $75^\circ$. (E) $85^\circ$.

**Questão 19:** Sejam $X, Y, Z, W$ subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X \setminus Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X \setminus Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] \setminus [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. (B) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$. (C) $\{1, 3, 7, 8\}$. (D) $\{1, 3\}$. (E) $\{7, 8\}$.

**Questão 20:** Sejam $r$ e $s$ duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja $P$ um ponto no plano definido por $r$ e $s$ e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de $r$. As respectivas medidas da área e do perímetro, em $cm^2$ e cm, do triângulo equilátero $PQR$ cujos vértices $Q$ e $R$ estão, respectivamente, sobre as retas $r$ e $s$, são iguais a

(A) $175\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$. (B) $175\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$. (C) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$.
(D) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$. (E) 700 e $10\sqrt{21}$.

**Problema 01:** Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

**Problema 02:** Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a

$$S = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z + 2| < 3\}.$$

**Problema 03:** Seja $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine as funções $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sendo $h$ uma função par e $g$ uma função ímpar.

**Problema 04:** Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1).$$

Encontre todos os valores de $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ de modo que $x = 0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

**Problema 05:** Uma matriz real quadrada $A$ é ortogonal se $A$ é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes $2 \times 2$ que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

**Problema 06:** Determine todos os valores $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em $x$)

$$x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$$

admita apenas raízes reais simples.

**Problema 07:** Em um espaço amostral com uma probabilidade $P$, são dados os eventos $A$, $B$ e $C$ tais que: $P(A) = P(B) = 1/2$, com $A$ e $B$ independentes, $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e sabe-se que $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$. Calcule as probabilidades condicionais $P(C|A \cap B)$ e $P(C|A \cap B^C)$.

**Problema 08:** um triângulo acutângulo de vértices $A$, $B$ e $C$ está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo $ABC$.

**Problema 09:** Sejam $C$ uma circunferência de raio $r$ e centro $O$ e $\overline{AB}$ um diâmetro de $C$. Considere o triângulo equilátero $BDE$ inscrito em $C$. Traça-se a reta $s$ passando pelos pontos $O$ e $E$ até interceptar em $F$ a reta $t$ tangente à circunferência $C$ no ponto $A$. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco $AE$ e pelos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EF}$ em torno do diâmetro $\overline{AB}$.

**Problema 10:** Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos $(2, 5)$ e $(-1, 2)$ e tal que $a, b, c$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente à parábola no ponto $(2, 5)$.

## I.7 Vestibular 2007

**Questão 01:** Se $A, B, C$ forem conjuntos tais que

$$n(A \cup B) = 23, \quad n(B \setminus A) = 12, \quad n(C \setminus A) = 10,$$
$$n(B \cap C) = 6 \quad \text{e} \quad n(A \cap B \cap C) = 4.$$

então $n(A)$, $n(A \cup C)$, $n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,

(A) formam uma progressão aritmética de razão 6.
(B) formam uma progressão aritmética de razão 2.
(C) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.
(D) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.
(E) não formam uma progressão aritmética.

**Questão 02:** Seja $A$ um conjunto com 14 elementos e $B$ um subconjunto de $A$ com 6 elementos. O número de subconjuntos de $A$ com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de $B$ é

(A) $2^8 - 9$. (B) $2^8 - 1$. (C) $2^8 - 2^6$. (D) $2^{14} - 2^8$. (E) $2^8$.

**Questão 03:** Considere a equação

$$16\left(\frac{1 - ix}{1 + ix}\right)^3 = \left(\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i}\right)^4.$$

Sendo $x$ um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

(A) 3. (B) 6. (C) 9. (D) 12. (E) 15.

**Questão 04:** Assinale a opção que indica o módulo do número complexo

$$\frac{1}{1 + i\cotg x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(A) $|\cos x|$. (B) $(1 + \operatorname{sen} x)/2$. (C) $\cos^2 x$. (D) $|\operatorname{cossec} x|$. (E) $|\operatorname{sen} x|$.

**Questão 05:** Considere: um retângulo cujos lados medem $B$ e $H$, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, $B$ e $H$, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então $B/H$ é uma raiz do polinômio

(A) $\pi^3 x^4 + \pi^2 x^2 + \pi x - 2 = 0$. (B) $\pi^2 x^3 + \pi^3 x^2 + x + 1 = 0$.
(C) $\pi^3 x^3 - \pi^2 x^2 + \pi x + 2 = 0$. (D) $\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0$.
(E) $x^4 - 2\pi^2 x^2 + \pi x - 1 = 0$.

**Questão 06:** Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão $r$, então $r$ pertence ao intervalo

(A) $(0, (1+\sqrt{2})/2)$.

(B) $\left((1+\sqrt{2})/2, \sqrt{(1+\sqrt{5})/2}\right)$.

(C) $\left(\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}, (1+\sqrt{5})/2\right)$.

(D) $\left((1+\sqrt{5})/2, \sqrt{2+\sqrt{2}/2}\right)$.

(E) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}/2}, (2+\sqrt{3})/2\right)$.

**Questão 07:** Sejam $x$, $y$ e $z$ números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base $k$ são números primos satisfazendo

$$\log_k(xy) = 49.$$
$$\log_k(x/z) = 41.$$

Então, $\log_k(xyz)$ é igual a

(A) 52. (B) 61. (C) 67. (D) 80. (E) 97.

**Questão 08:** Sejam $x$ e $y$ dois números reais tais que $e^x$, $e^y$ e o quociente

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{1 - e^y\sqrt{5}}$$

são todos racionais. A soma $x + y$ é igual a

(A) 0. (B) 1. (C) $2\log_5 3$. (D) $\log_5 2$. (E) $3\log_5 2$.

**Questão 09:** Seja $Q(z)$ um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de $z^5$ é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ e $Q(1) = 8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

(A) 9. (B) 7. (C) 5. (D) 3. (E) 1.

**Questão 10:** Sendo $c$ um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos

$$(x+a)^3 + (x+b)^3.$$

Neste caso, $|a + |b| - c|$ é igual a

(A) 104. (B) 114. (C) 124. (D) 134. (E) 144.

**Questão 11:** Sobre a equação na variável real $x$,

$$||||x-1|-3|-2|=0,$$

podemos afirmar que

(A) ela não admite solução real.
(B) a soma de todas as suas soluções é 6.
(C) ela admite apenas soluções positivas.
(D) a soma de todas as soluções é 4.
(E) ela admite apenas duas soluções reais.

**Questão 12:** Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo a seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

(A) 204. (B) 206. (C) 208. (D) 210. (E) 212.

**Questão 13:** Seja $x$ um número real no intervalo $0 < x < \pi/2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\sec(x)\geq 0.$$

(A) $\pi/2$. (B) $\pi/3$. (C) $\pi/4$. (D) $\pi/6$. (E) $\pi/12$.

**Questão 14:** Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$A=\left\{x_k=\operatorname{sen}^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right):k=1,2\right\}\text{ e}$$
$$B=\left\{y_k=\operatorname{sen}^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right):k=1,2\right\}.$$

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) $\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)/3$. (E) $\left(2+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)/3$.

**Questão 15:** Sejam $A = (a_{jk})$ e $B = (b_{jk})$, duas matrizes quadradas $n \times n$, onde $a_{jk}$ e $b_{jk}$ são, respectivamente, os elementos da linha $j$ e coluna $k$ das matrizes $A$ e $B$, definidos por

$$a_{jk} = \binom{j}{k}, \quad \text{quando} \quad j \geq k, \qquad a_{jk} = \binom{k}{j}, \quad \text{quando} \quad j > k$$

e

$$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p}.$$

O traço de uma matriz quadrada $(c_{jk})$ de ordem $n \times n$ é definido por $\sum_{p=1}^{n} c_{pp}$. Quando $n$ for ímpar, o traço de $A + B$ é igual a

(A) $n(n-1)/3$. (B) $(n-1)(n+1)/4$. (C) $(n^2 - 3n + 2)/(n-2)$.
(D) $3(n-1)/n$. (E) $(n-1)/(n-2)$.

**Questão 16:** Considere no plano cartesiano $xy$ o triângulo delimitado pelas retas $2x = y$, $x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede

(A) 15/2. (B) 13/4. (C) 11/6. (D) 9/4. (E) 7/2.

**Questão 17:** Sejam $A : (a, 0)$, $B : (0, a)$ e $C : (a, a)$, pontos do plano cartesiano, em que $a$ é um número real não nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos $P : (x, y)$ cuja distância à reta que passa por $A$ e $B$ é igual à distância de $P$ ao ponto $C$.

(A) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$.
(B) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax + 2ay - 3a^2 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$.
(D) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$.
(E) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$.

**Questão 18:** Seja $P_n$ um polígono regular de $n$ lados, com $n > 2$. Denote por $a_n$ o apótema e por $b_n$ o comprimento de um lado de $P_n$. O valor de $n$ para o qual valem as desigualdades

$$b_n \leq a_n \quad \text{e} \quad b_{n-1} > a_{n-1},$$

pertence ao intervalo

(A) $3 < n < 7$. (B) $6 < n < 9$. (C) $8 < n < 11$. (D) $10 < n < 13$. (E) $12 < n < 15$.

**Questão 19:** Sejam $P_1$ e $P_2$ octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio $R$. Sendo $A_1$ a área de $P_1$ e $A_2$ a área de $P_2$, então a razão $A_1/A_2$ é igual a

(A) $\sqrt{5/8}$. (B) $9\sqrt{2}/16$. (C) $2(\sqrt{2}-1)$. (D) $(4\sqrt{2}+1)/8$. (E) $(2-\sqrt{2})/4$.

**Questão 20:** Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm$^3$ e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

(A) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$. (B) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})/3$. (C) $(3\sqrt{3} - \sqrt{6})/21$.
(D) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})/6$. (E) $(2\sqrt{6} - \sqrt{2})/22$.

**Problema 01:** Determine o conjunto $C$, sendo $A$, $B$ e $C$ conjuntos de números reais tais que

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 2\}, \\ A \cup B &= \{x \in \mathbb{R} : 8^{-x} - 3.4^{-x} - 2^{2-x} > 0\}, \\ A \cap C &= \{x \in \mathbb{R} : \log(x+4) \leq 0\}. \\ B \cap C &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 2x + 7 < 2\}. \end{aligned}$$

**Problema 02:** Determine o conjunto $A$ formado por todos os números complexos $z$ tais que

$$\frac{\overline{z}}{z - 2i} + \frac{2z}{\overline{z} + 2i} = 3 \quad \text{e} \quad 0 < |z - 2i| \leq 1.$$

**Problema 03:** Seja $k$ um número inteiro positivo e

$$A_k = \{j \in \mathbb{N} : j \leq k \text{ e } \operatorname{mdc}(j, k) = 1\}.$$

Verifique se $n(A_4)$, $n(A_9)$, $n(A_{27})$ e $n(A_{81})$, estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

**Problema 04:** Considere a equação

$$\sqrt{x^4 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

a) Para que valores do parâmetro real $p$ a equação admite raízes reais?

b) Determine todas essas raízes reais.

**Problema 05:** Sendo $x$, $y$, $z$ e $w$ números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} \log|(x + 2y)(w - 3z)^{-1}| &= 0, \\ 2^{x+3z} - 8.2^{y-4z+w} &= 0, \\ \sqrt[4]{2x + y + 6z - 2w} - 2 &= 0. \end{aligned}$$

**Problema 06:** Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

**Problema 07:** Considere um triângulo isósceles $ABC$, retângulo em $B$. Sobre o lado $\overline{BC}$, considere, a partir de $B$, os pontos $D$ e $E$, tais que os comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$, nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se $\beta$ for o ângulo $EÂD$, determine $\operatorname{tg}\beta$ em função da razão $r$ da progressão.

**Problema 08:** Considere, no plano cartesiano $xy$, duas circunferências $C_1$ e $C_2$, que se tangenciam exteriormente em $P = (5, 10)$. O ponto $Q = (10, 12)$ é o centro de $C_1$. Determine o raio da circunferência $C_2$, sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação $x = y$.

**Problema 09:** Seja $C_1$ uma circunferência de raio $R_1$ inscrita num triângulo equilátero de altura $h$. Seja $C_2$ uma segunda circunferência, de raio $R_2$, que tangencia dois lados do triângulo internamente e $C_1$ externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.

**Problema 10:** Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume $8\sqrt{3}$ cm$^3$, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

## I.8 Vestibular 2006

**Questão 01:** Seja $E$ um ponto externo a uma cicunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos $B$ e $A$, e, $C$ e $D$, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto $G$. Se $m(\overline{EB}) = 5$, $m(\overline{BA}) = 7$, $m(\overline{EC}) = 4$, $m(\overline{GD}) = 3$ e $m(\overline{AG}) = 6$, então $m(\overline{GF})$ vale

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

**Questão 02:** Seja $U$ um conjunto não vazio com $n$ elementos, $n \geq 1$. Seja $S$ um subconjunto de $\mathcal{P}(U)$ com a seguinte propriedade: Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$. Então, o número máximo de elementos que $S$ pode ter é:

(A) $2^{n-1}$.
(B) $n/2$, se $n$ for par, e $(n+1)/2$, se $n$ for ímpar.
(C) $n+1$.
(D) $2^n - 1$.
(E) $2^{n-1} + 1$.

**Questão 03:** Sejam $A$ e $B$ subconjuntos finitos de um mesmo conjunto $X$, tais que $n(B \setminus A)$, $n(A \setminus B)$ e $n(A \cap B)$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Sabendo que $n(B \setminus A) = 4$ e $n(A \cup B) + r = 64$, então, $n(A \setminus B)$ é igual a

(A) 12. (B) 17. (C) 20. (D) 22. (E) 24.

**Questão 04:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77}\,\mathrm{sen}\,[5(x + \pi/6)]$ e seja $B$ o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Se $m$ é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e $n$ é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$, então $m + n$ é igual a

(A) $\frac{2\pi}{15}$. (B) $\frac{\pi}{15}$. (C) $-\frac{\pi}{30}$. (D) $-\frac{\pi}{15}$. (E) $-\frac{2\pi}{15}$.

**Questão 05:** Considere a equação $\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = m$, na variável real $x$, com $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de $m$ para os quais esta equação admite solução real é

(A) $(-1, 0) \cup (0, 1)$. (B) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. (C) $(-1, 1)$.
(D) $(0, \infty)$. (E) $(-\infty, +\infty)$.

**Questão 06:** Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

(A) $4^4.30$. (B) $4^3.60$. (C) $5^3.60$. (D) $\binom{7}{3}.4^3$. (E) $\binom{10}{7}$.

**Questão 07:** Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8(4^k\sqrt{2})$:

I. $S$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita;

II. $S$ é a soma dos termos de uma progressão artimética finita de razão 2/3;

III. $S = 3451$;

IV. $S \leq 3434 + \log_8 \sqrt{2}$.

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

(A) I e III. (B) II e III. (C) II e IV. (D) II. (E) III.

**Questão 08:** Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}f(z) + f(1)\overline{f(z)}$ é igual a

(A) $1$. (B) $2z$. (C) $2\,\mathrm{Re}\,z$. (D) $2\,\mathrm{Im}\,z$. (E) $2|z|^2$.

**Questão 09:** O conjunto solução de $(\mathrm{tg}^2 x - 1)(1 - \mathrm{cotg}^2 x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, é

(A) $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (C) $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(D) $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (E) $\left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**Questão 10:** Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e $n$ é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i\,\mathrm{sen}\,(n\alpha)$, então, é verdade que

(A) $2n\alpha$ é múltiplo de $2\pi$.
(B) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de $2\pi$.
(C) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$.
(D) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2.
(E) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de $\pi$.

**Questão 11:** A condição para que as constantes reais $a$ e $b$ tornem incompatível o sistema linear $\begin{cases} x+y+3z=2 \\ x+2y+5z=1 \\ 2x+2y+az=b \end{cases}$ é

(A) $a-b\neq 2$. (B) $a+b=10$. (C) $4a-6b=0$. (D) $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$. (E) $a.b=24$.

**Questão 12:** Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}=-1$, então o valor do $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a

(A) 0. (B) 4. (C) 8. (D) 12. (E) 16.

**Questão 13:** Seja $p$ um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite $1-i$ como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raizes de $p$ são, respectivamente, 10 e $-40$. Sendo afirmado que três raízes de $p$ são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

(A) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{193}}{6}.3.\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{193}}{6}$. (B) $2-4\sqrt{13}.2.2+4\sqrt{13}$. (C) $-4.2.8$.
(D) $-2.3.8$. (E) $-1.2.5$.

**Questão 14:** Sobre o polinômio $p(x)=x^5-5x^4+4x^2-3x-2$ podemos afirmar que

(A) $x=2$ não é raiz de $p$.
(B) $p$ só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais.
(C) $p$ admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira.
(D) $p$ só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras.
(E) $p$ admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais.

**Questão 15:** Seja o sistema linear nas incógnitas $x$ e $y$, com $a$ e $b$ reais, dado por $\begin{cases} (a-b)x-(a+b)y=1 \\ (a+b)x+(a-b)y=1 \end{cases}$. Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema é possível e indeterminado se $a=b=0$;

II. O sistema é possível e determinado se $a$ e $b$ não são simultaneamente nulos;

III. $x^2+y^2=(a^2+b^2)^{-1}$, se $a^2+b^2\neq 0$.

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

(A) I. (B) II. (C) III. (D) I e II. (E) II e III.

**Questão 16:** Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a+1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de $a$, para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é:

(A) $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$. (B) $\{4n^2, n \in \mathbb{N}\}$. (C) $\{6n^2 - 4n, n \in \mathbb{N}\}$.
(D) $\{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$. (E) $\mathbb{N}$.

**Questão 17:** Numa circunferência $C_1$ de raio $r_1 = 3$ cm está inscrito um hexágono regular $H_1$; em $H_1$ está inscrita uma circunferência $C_2$; em $C_2$ está inscrito um hexágono regular $H_2$ e, assim, sucessivamente. Se $A_n$ (em cm$^2$) é a área do hexágono $H_n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (em cm$^2$) é igual a

(A) $54\sqrt{2}$. (B) $54\sqrt{3}$. (C) $36(1+\sqrt{3})$. (D) $27(2-\sqrt{3})$. (E) $30(2+\sqrt{3})$.

**Questão 18:** Sejam a reta $s : 12x - 5y + 7 = 0$ e a circunferência $C : x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A reta $p$, que é perpendicular a $s$ e é secante a $C$, corta o eixo $Oy$ num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

(A) $\left(-\frac{91}{12}, -\frac{81}{12}\right)$. (B) $\left(-\frac{81}{12}, -\frac{74}{12}\right)$. (C) $\left(-\frac{74}{12}, -\frac{30}{12}\right)$.
(D) $\left(\frac{30}{12}, \frac{74}{12}\right)$. (E) $\left(\frac{75}{12}, \frac{91}{12}\right)$.

**Questão 19:** Os focos de uma elipse são $F_1(0, -6)$ e $F_2(0, 6)$. Os pontos $A(0, 9)$ e $B(x, 3)$, $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em $B$, $F_1$ e $F_2$ é igual a

(A) $22\sqrt{10}$. (B) $18\sqrt{10}$. (C) $15\sqrt{10}$. (D) $12\sqrt{10}$. (E) $6\sqrt{10}$.

**Questão 20:** Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm$^2$, é

(A) $\frac{81\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{81\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{81}{2}$. (D) $27\sqrt{3}$. (E) $27\sqrt{2}$.

**Problema 01:** Considere $A$ um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que: $F = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{P}(A)$ é uma partição de $A$ se as seguintes condições são satisfeitas:

I. $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, m$;

II. $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$, para $i, j = 1, \ldots, m$;

III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$.

Dizemos ainda que: $F$ é uma partição de ordem $k$ se $n(A_i) = k$, $i = 1, \ldots, m$. Supondo que $n(A) = 8$, determine:

a) As ordens possíveis para uma partição de $A$.

b) O número de partições de $A$ que têm ordem 2.

**Problema 02:** Seja $f : [0.1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$. Seja $g : (-1/2.1/2) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} f(x + 1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1 - f(x + 1/2), & 0 \leq x < 1/2 \end{cases}$, com $f$ definida acima. Justificando a resposta, determine se $g$ é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

**Problema 03:** Determine o coeficiente de $x^4$ no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

**Problema 04:** Determine para quais valores de $x \in (-\pi/2.\pi/2)$ vale a desigualdade $\log_{\cos x}(4\,\mathrm{sen}^2 x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2$.

**Problema 05:** Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente $a$ é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira: "Se uma das raízes de $p(x)$ é racional, então todas as suas raízes são racionais."

**Problema 06:** As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em $m^2$.

**Problema 07:** Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$. Determine o elemento $c_{41}$ da matriz $C = (A+B)^{-1}$.

**Problema 08:** Seja $(a_1.a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva $r$, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, determine o valor de $a + r$.

**Problema 09:** Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

**Problema 10:** Considere um losango $ABCD$ cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em $cm^2$, do círculo inscrito neste losango.

# I.9 Vestibular 2005

**Questão 01:** Considere os conjuntos $S = \{0.2.4.6\}$, $T = \{1.3.5\}$ e $U = \{0,1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$;

II. $\{2\} \subset S \setminus U$ e $S \cap T \cap U = \{0,1\}$;

III. Existe uma função $f : S \to T$ injetiva;

IV. Nenhuma função $g : T \to S$ é sobrejetiva.

Então, é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas IV. (C) apenas I e IV.
(D) apenas II e III. (E) apenas III e IV.

**Questão 02:** Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de

(A) R$ 17,50. (B) R$ 16,50. (C) R$ 12,50. (D) R$ 10,50. (E) R$ 9,50.

**Questão 03:** Uma circunferência passa pelos pontos $A = (0,2)$, $B = (0,8)$ e $C = (8.8)$. Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são

(A) $(0.5)$ e 6. (B) $(5.4)$ e 5. (C) $(4.8)$ e 5,5. (D) $(4.5)$ e 5. (E) $(4.6)$ e 5.

**Questão 04:** Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que

(A) $x \in ]0.2[$. (B) $x$ é racional. (C) $\sqrt{2x}$ é irracional.
(D) $x^2$ é irracional. (E) $x \in ]2.3[$.

**Questão 05:** Considere o triângulo de vértices $A$, $B$ e $C$, sendo $D$ um ponto do lado $\overline{AB}$ e $E$ um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $m(\overline{AB}) = 8$ cm, $m(\overline{AC}) = 10$ cm, $m(\overline{AD}) = 4$ cm e $m(\overline{AE}) = 6$ cm, a razão das áreas dos triângulos $ADE$ e $ABC$ é

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{3}{5}$. (C) $\frac{3}{8}$. (D) $\frac{3}{10}$. (E) $\frac{3}{4}$.

**Questão 06:** Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a

(A) $\frac{4}{5}$. (B) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$. (C) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$. (D) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$. (E) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

**Questão 07:** A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

(A) $3\sqrt{3}$. (B) 6. (C) 5. (D) 4. (E) $2\sqrt{5}$.

**Questão 08:** Uma esfera de raio $r$ é seccionada por $n$ planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então $n$ é igual a

(A) 4. (B) 3. (C) 6. (D) 5. (E) 7.

**Questão 09:** Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é $7200°$. O número de vértices deste prisma é igual a

(A) 11. (B) 32. (C) 10. (D) 20. (E) 22.

**Questão 10:** Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0,0)$, $B = (2,2)$ e $C = (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

(A) $\frac{8}{3}$. (B) 3. (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. (E) 8.

**Questão 11:** No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e $-1$ são raízes de $p(x)$, então a soma $a - b + c$ é igual a

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1. (E) $\frac{3}{2}$.

**Questão 12:** O menor inteiro positivo $n$ para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é

(A) 2499. (B) 2501. (C) 2500. (D) 3600. (E) 4900.

**Questão 13:** Seja $D \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $f : D \to D$ uma função dada por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Considere as afirmações:

I. $f$ é injetiva e sobrejetiva;

II. $f$ é injetiva, mas não sobrejetiva;

III. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, para todo $x \in D$, $x \neq 0$;

IV. $f(x).f(-x) = 1$, para todo $x \in D$.

Então, são verdadeiras

(A) apenas I e III. (B) apenas I e IV. (C) apenas II e III.
(D) apenas I, III e IV. (E) apenas II, III e IV.

**Questão 14:** O número complexo $2 + i$ é raiz do polinômio

$$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q.$$

com $p, q \in \mathbb{R}$. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de $f$ é

(A) 4. (B) $-4$. (C) 6. (D) 5. (E) $-5$.

**Questão 15:** Considere a equação em $x$

$$a^{x+1} = b^{1/x},$$

onde $a$ e $b$ são números reais positivos, tais que $\ln b = 2 \ln a > 0$. A soma das soluções da equação é

(A) 0. (B) $-1$. (C) 1. (D) $\ln 2$. (E) 2.

**Questão 16:** O intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém todas as soluções da inequação

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{2} \geq \frac{\pi}{6}$$

é

(A) $[-1, 4]$. (B) $[-3, 1]$. (C) $[-2, 3]$. (D) $[0, 5]$. (E) $[4, 6]$.

**Questão 17:** Seja $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\frac{1 - \bar{z}w}{z - w}\right|$ assume valor

(A) maior que 1, para todo $w$ com $|w| > 1$.
(B) menor que 1, para todo $w$ com $|w| < 1$.
(C) maior que 1, para todo $w$ com $w \neq z$.
(D) igual a 1, independente de $w$ com $w \neq z$.
(E) crescente para $|w|$ crescente, com $|w| < |z|$.

**Questão 18:** O sistema linear

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

não admite solução se e somente se o número real $b$ for igual a

(A) $-1$. (B) 0. (C) 1. (D) 2. (E) $-2$.

**Questão 19:** Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se $P_1$ é a probabilidade de não sair bola azul e $P_2$ é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é

(A) 0,21. (B) 0,25. (C) 0,28. (D) 0,35. (E) 0,40.

**Questão 20:** A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -2)$ são, respectivamente,

(A) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$. (D) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (E) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Problema 01:** Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}^*.$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

**sln:** Neste ano, o ITA considerou $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$

**Problema 02:** Seja $C$ uma circunferência de centro na origem, passando pelo ponto $P = (3, 4)$. Se $t$ é a reta tangente a $C$ por $P$, determine a circunferência $C'$ de menor raio, com centro sobre o eixo $x$ e tangente simultaneamente à reta $t$ e à circunferência $C$.

**Problema 03:** Sejam $A$ e $B$ matrizes $2 \times 2$ tais que $AB = BA$ e que satisfazem a equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se $B$ é inversível, mostre que

a) $AB^{-1} = B^{-1}A$.
b) $A$ é inversível.

**Problema 04:** Seja $n$ o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n-1$ ângulos (internos) do polígono é $2004°$, determine o número $n$ de lados do polígono.

**Problema 05:**

a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

b) Conclua de a) que $\alpha$ é um número racional.

**Problema 06:** Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx},$$

sendo $m$ um parâmetro real.

a) Resolva a equação em função do parâmetro $m$.

b) Determine todos os valores de $m$ para os quais a equação admite solução não nula.

**Problema 07:** Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é $\pi$ cm$^3$. Determine os ângulos deste triângulo.

**Problema 08:** São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

**Problema 09:** Obtenha todos os pares $(x, y)$, com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) &= \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos y &= 1 \end{aligned}$$

**Problema 10:** Determine todos os valores reais de $a$ para os quais a equação

$$(x-1)^2 = |x-a|$$

admita exatamente três soluções distintas.

## I.10 Vestibular 2004

**Questão 01:** Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$;

II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$;

III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$;

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I e III. (B) apenas II e IV. (C) apenas II e III.
(D) apenas IV. (E) todas as afirmações.

**Questão 02:** Seja o conjunto $S = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$;

II. $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \emptyset$;

III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

(A) I e II. (B) I e III. (C) II e III. (D) I. (E) II.

**Questão 03:** Seja $\alpha$ um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de $x$ tais que $\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$.

(A) $]-\infty, 0[ \cup [2, +\infty[$. (B) $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$. (C) $]0, 2[$.
(D) $]-\infty, 0[$. (E) $]2, +\infty[$.

**Questão 04:** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = 2\cos x + 2i \operatorname{sen} x$. Então, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, o valor do produto $f(x)f(y)$ é igual a

(A) $f(x + y)$. (B) $2f(x + y)$. (C) $4if(x + y)$. (D) $f(xy)$. (E) $2f(x) + 2if(y)$.

**Questão 05:** Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

(A) 210. (B) 315. (C) 410. (D) 415. (E) 521.

**Questão 06:** Seja $x \in \mathbb{R}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.

(A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $A$ possui inversa.
(B) Apenas para $x > 0$, $A$ possui inversa.
(C) São apenas dois os valores de $x$ para os quais $A$ possui inversa.
(D) Não existe valor de $x$ para o qual $A$ possui inversa.
(E) Para $x = \log_2 5$, $A$ não possui inversa.

**Questão 07:** Considere as funções

$$\text{arc sen} : [-1, +1] \to [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{e} \quad \text{arc cos} : [-1, +1] \to [0, \pi].$$

assinale o valor de $\cos\left(\text{arc sen}\,\frac{3}{5} + \text{arc cos}\,\frac{4}{5}\right)$.

(A) $\frac{6}{25}$. (B) $\frac{7}{25}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{2}{5}$. (E) $\frac{5}{12}$.

**Questão 08:** Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a $5°$. Então, seu maior ângulo mede, em graus,

(A) 120. (B) 130. (C) 140. (D) 150. (E) 160.

**Questão 09:** O termo independente de $x$ no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[4]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é

(A) $729\sqrt[4]{45}$. (B) $972\sqrt[4]{15}$. (C) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$. (D) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$. (E) $165\sqrt[4]{75}$.

**Questão 10:** Considere as afirmações dadas a seguir, em que $A$ é uma matriz quadrada $n \times n$, $n \geq 2$:

I. O determinante de $A$ é nulo se e somente se $A$ possui uma linha ou uma coluna nula;

II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, \ldots, n$, então $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$;

III. Se $B$ for obtida de $A$, multiplicado-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A$.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

(A) apenas II. (B) apenas III. (C) apenas I e II. (D) apenas II e III. (E) todas.

**Questão 11:** Considere um cilindro circular reto, de volume igual a $360\pi$ cm$^3$, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}$ cm$^2$, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm$^2$,

(A) $18\sqrt{427}$. (B) $27\sqrt{427}$. (C) $36\sqrt{427}$. (D) $108\sqrt{3}$. (E) $45\sqrt{427}$.

**Questão 12:** O conjunto de todos os valores de $\alpha$, $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em $x$) $x^4 - \sqrt[4]{48}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$ são todas reais, é

(A) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$. (B) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. (C) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. (D) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. (E) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$.

**Questão 13:** Sejam as funções $f$ e $g$ definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$, em que $\alpha$ e $\beta$ são números reais. Considere que estas funções são tais que

| $f$ | | $g$ | |
|---|---|---|---|
| Valor mínimo | Ponto de mínimo | Valor máximo | Ponto de máximo |
| $-1$ | $< 0$ | $\frac{9}{4}$ | $> 0$ |

Então, a soma de todos os valores de $x$ para os quais $(f \circ g)(x) = 0$ é igual a

(A) 0. (B) 2. (C) 4. (D) 6. (E) 8.

**Questão 14:** Considere todos os números $z = x + iy$ que têm módulo $\sqrt{7}/2$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a

(A) $\frac{25}{9}$. (B) $\frac{49}{16}$. (C) $\frac{81}{25}$. (D) $\frac{25}{7}$. (E) 4.

**Questão 15:** Para algum número real $r$, o polinômio $8x^4 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números abaixo está mais próximo de $r$?

(A) 1,62. (B) 1,52. (C) 1,42. (D) 1,32. (E) 1,22.

**Questão 16:** Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos $(x, y)$ do plano que satisfazem a equação

$$\det\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288.$$

(A) Uma elipse. (B) Uma parábola. (C) Uma circunferência.
(D) Uma hipérbole. (E) Uma reta.

**Questão 17:** A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$, $z \in \mathbb{C}$, é igual a

(A) $-2$. (B) $-1$. (C) $0$. (D) $1$. (E) $2$.

**Questão 18:** Dada a equação $x^3 + (m+1)x^2 + (m+9)x + 9 = 0$, em que $m$ é uma constante real, considere as seguintes afirmações:

I. Se $m \in ]-6, 6[$, então existe apenas uma raiz real;

II. Se $m = -6$ ou $m = +6$, então existe raiz com multiplicidade 2;

III. $\forall m \in \mathbb{R}$, todas as raízes são reais.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

(A) I. (B) II. (C) III. (D) II e III. (E) I e II.

**Questão 19:** Duas circunferências concêntricas $C_1$ e $C_2$ têm raios de 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de $C_2$, tangente a $C_1$. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ mede, em cm$^2$,

(A) $9(\pi - 3)$. (B) $18(\pi + 3)$. (C) $18(\pi - 2)$. (D) $18(\pi + 2)$. (E) $16(\pi + 3)$.

**Questão 20:** A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede $R$ cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm$^3$, é igual a

(A) $\pi R^3$. (B) $\pi\sqrt{2}R^3$. (C) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}R^3$. (D) $\pi\sqrt{3}R^3$. (E) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}R^3$.

**Problema 01:** Seja $A$ um conjunto não-vazio.

a) Se $n(A) = m$, calcule $n(\mathcal{P}(A))$ em termos de $m$.

b) Denotando $\mathcal{P}^1(A) = \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}^{k+1}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor $k$, tal que $n(\mathcal{P}^k(A)) \geq 65000$, sabendo que $n(A) = 2$.

**Problema 02:** Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual a probabilidade de se retirar uma bola verde?

**Problema 03:** Determine os valores reais do parâmetro $a$ para os quais existe um número real $x$ satisfazendo $\sqrt{1 - x^2} \geq a - x$.

**Problema 04:** Sendo $z = \dfrac{i+1}{\sqrt{2}}$, calcule

$$\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = |z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{60}|.$$

**Problema 05:** Para $b > 1$ e $x > 0$, resolva a equação em $x$: $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$.

**Problema 06:** Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que $d$ é uma constante real. Para qual valor de $d$ a equação admite uma raiz dupla no intervalo $]0,1[$?

**Problema 07:** Prove que, se os ângulos internos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ de um triângulo satisfazem a equação

$$\operatorname{sen}(3\alpha) + \operatorname{sen}(3\beta) - \operatorname{sen}(3\gamma) = 0,$$

então, pelo menos um dos três ângulos $\alpha$, $\beta$ ou $\gamma$ é igual a $60°$.

**Problema 08:** Se $A$ é uma matriz real, considere as definições:

I. Uma matriz quadrada $A$ é ortogonal se e só se $A$ for inversível e $A^{-1} = A^t$;

II. Uma matriz quadrada $A$ é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

**Problema 09:** Sejam $r$ e $s$ duas retas que se interceptam segundo um ângulo de $60°$. Seja $C_1$ uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro $O$ se situa em $s$, a 5 cm de $r$. Determine o raio da menor circunferência tangente a $C_1$ e à reta $r$, cujo centro também se situa na reta $s$.

**Problema 10:** Sejam os pontos $A : (2,0)$, $B : (4,0)$ e $P : (3,5 + 2\sqrt{2})$.

a) Determine a equação da circunferência $C$, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos $A$ e $B$ e é tangente ao eixo $y$.

b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência $C$ que passam pelo ponto $P$.

# I.11 Vestibular 2003

**Questão 01:** Seja $z \in \mathbb{C}$. Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $w = \dfrac{2iz^2 + 5\overline{z} - i}{1 + 3\overline{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z}$, então $\overline{w} = \dfrac{-2i\overline{z}^2 + 5z - i}{1 + 3z^2 - 2i\overline{z} - 3|\overline{z}|^2 + 2z|}$;

II. Se $z \neq 0$ e $w = \dfrac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z}$, então $|w| \leq \dfrac{2z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}z|}$;

III. Se $w = \dfrac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então $2\arg z + \dfrac{\pi}{12}$ é um argumento de $w$,

é (são) verdadeira(s):

(A) todas. (B) apenas I e II. (C) apenas II e III.
(D) apenas I e III. (E) apenas II.

**Questão 02:** O valor de $y^2 - xz$ para o qual os números $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$, $x$, $y$, $z$ e $\operatorname{sen} 75°$, nesta ordem, formam uma progressão aritmética é:

(A) $3^{-4}$. (B) $2^{-6}$. (C) $6^{-2}$. (D) $2^{-5}$. (E) $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

**Questão 03:** Considere a função $f(x) : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3^{x-2}(9^{2x+1})^{\frac{1}{2}}} - \left(3^{2x+5}\right)^{\frac{1}{7}} + 1$. A soma de todos os valores de $x$ para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 4. (E) 6.

**Questão 04:** Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-constante e tal que $f(x + y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Das afirmações:

I. $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$;

II. $f(nx) = [f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

III. $f$ é par,

é (são) verdadeira(s):

(A) apenas I e II. (B) apenas II e III. (C) apenas I e III.
(D) todas. (E) nenhuma.

**sln:** Neste ano, o ITA considerou $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3 \ldots\}$.

**Questão 05:** Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, cujos coeficientes $2, a_2, \ldots, a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sabendo-se que $-1/2$ é uma raiz de $P$ e que $P(2) = 5460$, tem-se que o valor de $\frac{a^2 - q^3}{q^4}$ é igual a:

(A) $\frac{5}{4}$. (B) $\frac{3}{2}$. (C) $\frac{7}{4}$. (D) $\frac{11}{6}$. (E) $\frac{15}{8}$.

**Questão 06:** Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se o resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

(A) $-6$. (B) $-4$. (C) 4. (D) 7. (E) 9.

**Questão 07:** Das afirmações abaixo sobre a equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo:

I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais;

II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1;

III. Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $r$ é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{3}\right|^k < \frac{1}{2}$.

É (São) verdadeira(s):

(A) nenhuma. (B) apenas I. (C) apenas II. (D) apenas III. (E) apenas I e III.

**Questão 08:** Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira $x_1$ e uma raiz $x_2$, distinta de $x_1$. Então, $(k + x_1)x_2$ é igual a:

(A) $-6$. (B) $-3$. (C) 1. (D) 2. (E) 8.

**Questão 09:** Considere o conjunto $S = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b = 18\}$. A soma de todos os números da forma $\frac{18!}{a!\,b!}$, $\forall (a, b) \in S$, é:

(A) $8^6$. (B) $9!$. (C) $9^6$. (D) $12^6$. (E) $12!$.

**Questão 10:** O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

(A) 24. (B) 36. (C) 48. (D) 54. (E) 72.

**Questão 11:** Sejam $A$ e $P$ matrizes $n \times n$ inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:

I. $B^t$ é inversível e $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$;

II. Se $A$ é simétrica, então $B$ também o é;

III. $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

é (são) verdadeira(s):

(A) todas. (B) apenas I. (C) apenas I e II.
(D) apenas I e III. (E) apenas II e III.

**Questão 12:** O número de todos os valores de $a \in [0, 2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas $x$, $y$ e $z$, dado por $\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$, é possível e não-homogêneo, é igual a:

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5. (E) 6.

**Questão 13:** Para todo $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[\cos(2x)]^2[\operatorname{sen}(2x)]^2 \operatorname{sen} x$ é igual a:

(A) $2^{-4}[\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
(B) $2^{-4}[2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(7x) - \operatorname{sen}(9x)]$.
(C) $2^{-4}[-\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
(D) $2^{-4}[-\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(9x)]$.
(E) $2^{-4}[\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)]$.

**Questão 14:** Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente. Com respeito à função $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x$, temos que:

(A) $f$ é não-crescente e ímpar.
(B) $f$ não é par nem ímpar.
(C) $f$ é sobrejetora.
(D) $f$ é injetora.
(E) $f$ é constante.

**Questão 15:** Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo $Oy$. Cada uma destas circunferências corta o eixo $Ox$ em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

(A) de uma elipse.
(B) de uma parábola.
(C) de uma hipérbole.
(D) de duas retas concorrentes.
(E) da reta $y = -x$.

**Questão 16:** A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$, é igual a:

(A) $\sqrt{6}$. (B) $\frac{5}{2}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $3$. (E) $\frac{10}{3}$.

**Questão 17:** Sejam $r$ e $s$ duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja $P$ um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de $r$. A área do triângulo equilátero $PQR$, cujos vértices $Q$ e $R$ estão, respectivamente, sobre as retas $r$ e $s$, é igual, em cm$^2$, a:

(A) $3\sqrt{15}$. (B) $7\sqrt{3}$. (C) $5\sqrt{6}$. (D) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$. (E) $\frac{7}{2}\sqrt{15}$.

**Questão 18:** Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a $3780^\circ$. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

(A) 63. (B) 69. (C) 90. (D) 97. (E) 106.

**Questão 19:** Considere o triângulo isósceles $OAB$, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado $\overline{AB}$ de comprimento $2R$. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por $O$ e é paralela ao lado $\overline{AB}$, é igual a:

(A) $\frac{\pi R^3}{2}$. (B) $\pi R^3$. (C) $\frac{4\pi R^3}{3}$. (D) $\sqrt{2}\pi R^3$. (E) $\sqrt{3}\pi R^3$.

**Questão 20:** Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 cm$^2$. A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{15}}{3}$. (B) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$. (C) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$. (D) $\frac{7}{5}$. (E) $\sqrt{3}$.

**Problema 01:** Sejam $U$ um conjunto não-vazio e $A \subset U$, $B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

a) Se $A \cap B = \emptyset$, então $B \subset A^C$.

b) $B \setminus A^C = B \cap A$.

**Problema 02:** Determine o conjunto dos números complexos $z$ para os quais o número $w = \frac{z - \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| - |z+1| - 3}}$ pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

**Problema 03:** Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eleia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes $v_A$ e $v_T$, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1, t_2, t_3, \ldots$ que Aquiles precisa para percorrer as distâncias $d_1, d_2, d_3, \ldots$, respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, $d_n$ denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante $\sum_{k=1}^{n-1} t_k$ da corrida. Verifique que os termos $t_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

**Problema 04:** Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em seu domínio, é par.

**Problema 05:** Sejam $a$, $b$, $c$ e $d$ constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 1$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a $-5$, determine o valor de $a + b + c + d$.

**Problema 06:** Sejam $a$, $b$, $c$ e $d$ números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz $\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$ na forma de um produto de números reais.

**Problema 07:** Encontre todos os valores de $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para os quais a equação na variável real $x$, $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 + \frac{e^x}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{e^x}{2}\right) = a$, admite solução.

**Problema 08:** Sabe-se que uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 - y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente à elipse no ponto $P$. Determine as coordenadas de $P$.

**Problema 09:** Considere um quadrado $ABCD$. Sejam $E$ o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e $F$ um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$. Prove que $\cos\alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = BAF$ e $\beta = EAD$.

**Problema 10:** Quatro esferas de mesmo raio $R > 0$ são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento $2R$. Determine, em função de $R$, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

## I.12 Vestibular 2002

**Questão 01:** Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$;

II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$;

III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.

Então, destas é (são) verdadeira(s)

(A) apenas I. (B) apenas I e II. (C) apenas II e III. (D) apenas I e III. (E) todas.

**Questão 02:** Sejam $a, b, c$ reais não-nulos e distintos, $c > 0$. Sendo par a função dada por

$$f(x) = \frac{ax + b}{x + c}, \quad -c < x < c.$$

então $f(x)$, para $-c < x < c$, é constante e igual a

(A) $a + b$. (B) $a + c$. (C) $c$. (D) $b$. (E) $a$.

**Questão 03:** os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{5 - |2x - 1| - 6}$ está definida, formam o conjunto

(A) $[0, 1]$. (B) $[-5, 6]$. (C) $[-5, 0] \cup [1, \infty)$.
(D) $(-\infty, 0] \cup [1, 6]$. (E) $[-5, 0] \cup [1, 6]$.

**Questão 04:** Seja a equação em $\mathbb{C}$, $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

(A) $2\sqrt{3}$. (B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $-i$. (E) $\frac{i}{2}$.

**Questão 05:** Sejam $A$ um conjunto com 8 elementos e $B$ um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $\mathcal{P}(B \setminus A) \cup \mathcal{P}(\emptyset)$ é igual a

(A) 8. (B) 16. (C) 20. (D) 17. (E) 9.

**Questão 06:** Sejam $f$ e $g$ duas funções definidas por

$$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3\operatorname{sen} x - 1} \quad \text{e} \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\operatorname{sen}^2 x - 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A soma do valor mínimo de $f$ com o valor mínimo de $g$ é igual a

(A) 0. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$. (E) 1.

**Questão 07:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \{y \in \mathbb{R}; \operatorname{sen} y < x\}.$$

Se $A$ é tal que $f(x) = \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, então

(A) $A = [-1, 1]$.
(B) $A = [a, \infty)$, $\forall a > 1$.
(C) $A = [a, \infty)$, $\forall a \geq 1$.
(D) $A = (-\infty, a]$, $\forall a < -1$.
(E) $A = (-\infty, a]$, $\forall a \leq -1$.

**Questão 08:** A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem resto $x+1$. Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x-1$ e $x-2$ são, respectivamente, os números $a$ e $b$, então $a^2 + b^2$ vale

(A) 13. (B) 5. (C) 2. (D) 1. (E) 0.

**Questão 09:** Sabendo que a equação

$$x^3 - px^2 = q^m, \quad p, q > 0, \quad q \neq 1, \quad m \in \mathbb{N},$$

possui três raízes reais positivas $a$, $b$ e $c$, então

$$\log_q \left[abc(a^2 + b^2 + c^2)^{a+b+c}\right]$$

é igual a

(A) $2m + p \log_q p$. (B) $m + 2p \log_q p$. (C) $m + p \log_q p$.
(D) $m - p \log_q p$. (E) $m - 2p \log_q p$.

**Questão 10:** Dada a função quadrática

$$f(x) = x^2 \ln \frac{2}{3} + x \ln 6 - \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2}$$

temos que

(A) a equação $f(x) = 0$ não possui raízes reais.
(B) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais distintas e o gráfico de $f$ possui concavidade para cima.
(C) a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes reais iguais e o gráfico de $f$ possui concavidade para baixo.
(D) o valor máximo de $f$ é $\dfrac{\ln 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.
(E) o valor máximo de $f$ é $2\dfrac{\ln 2 \ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$.

**Questão 11:** Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras $a$, $b$ e $c$?

(A) 1692. (B) 1572. (C) 1520. (D) 1512. (E) 1392.

**Questão 12:** O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas: "Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nesta ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes aqueles que corriam nas segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassá-lo no final da corrida." Com base no trecho acima, você conclui que

(A) David ganhou a corrida.
(B) Ralf ganhou a corrida.
(C) Rubinho chegou em terceiro lugar.
(D) Ralf chegou em segundo lugar.
(E) não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

**Questão 13:** Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos 25^\circ & \operatorname{sen} 65^\circ \\ \operatorname{sen} 120^\circ & \cos 390^\circ \end{bmatrix}.$$

O valor de seu determinante é

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) 1. (E) 0.

**Questão 14:** Sejam $A$ e $B$ matrizes quadradas de ordem $n$ tais que $AB = A$ e $BA = B$. Então, $[(A + B)^t]^2$ é igual a

(A) $(A + B)^2$. (B) $2(A^t.B^t)$. (C) $2(A^t + B^t)$. (D) $A^t + B^t$. (E) $A^tB^t$.

**Questão 15:** Seja $A$ uma matriz real $2 \times 2$. Suponha que $\alpha$ e $\beta$ sejam dois números distintos, e $V$ e $W$ duas matrizes reais $2 \times 1$ não-nulas, tais que

$$AV = \alpha V \quad e \quad AW = \beta W.$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $aV + bW$ é igual à matriz nula $2 \times 1$, então $a + b$ vale

(A) 0. (B) 1. (C) $-1$. (D) $\frac{1}{2}$. (E) $-\frac{1}{2}$.

**Questão 16:** O triângulo $ABC$, inscrito numa circunferência, tem um lado medindo $\frac{20}{\pi}$ cm, cujo ângulo oposto é de $15°$. O comprimento da circunferência, em cm, é

(A) $20\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$. (B) $400(2+\sqrt{3})$. (C) $80(1+\sqrt{3})$.
(D) $10(2\sqrt{3}+5)$. (E) $20(1+\sqrt{3})$.

**Questão 17:** Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas $r$ e $s$, com coeficientes angulares 2 e $\frac{1}{2}$, respectivamente, se interceptam na origem $O$. Se $B \in r$ e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a $r$ e a área do triângulo $OBC$ é igual a $12 \times 10^{-1}$, então a distância de $B$ ao eixo das ordenadas vale

(A) $\frac{8}{5}$. (B) $\frac{4}{5}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{1}{5}$. (E) 1.

**Questão 18:** Seja $k > 0$ tal que a equação $(x^2 - x) + k(y^2 - y) = 0$ define uma elipse com distância focal igual a 2. Se $(p, q)$ são as coordenadas de um ponto da elipse, com $q^2 - q \neq 0$, então $\frac{p - p^2}{q^2 - q}$ é igual a

(A) $2+\sqrt{5}$. (B) $2-\sqrt{5}$. (C) $2+\sqrt{3}$. (D) $2-\sqrt{3}$. (E) 2.

**Questão 19:** Considere a região do plano cartesiano $xy$ definida pela desigualdade

$$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0.$$

Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos em torno da reta $x - y = 0$, ela irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a

(A) $\frac{128}{3}\pi$. (B) $\frac{128}{4}\pi$. (C) $\frac{128}{5}\pi$. (D) $\frac{128}{6}\pi$. (E) $\frac{128}{7}\pi$.

**Questão 20:** Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

(A) 2 m. (B) 4 m. (C) 5 m. (D) 6 m. (E) 8 m.

**Problema 01:** Seja a função $f$ dada por

$$f(x) = (\log_3 5).\log_5 8^{x-1} + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}.$$

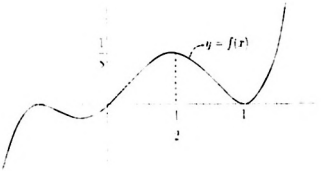
Determine todos os valores de $x$ que tornam $f$ não-negativa.

**Problema 02:** Mostre que

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4},$$

para quaisquer $x$ e $y$ reais positivos.
**Obs.:** $C_{n,p}$ denota a combinação de $n$ elementos tomados $p$ a $p$.

**Problema 03:** Com base no gráfico da função polinomial $y = f(x)$ esboçado abaixo, responda qual é o resto da divisão de $f(x)$ por $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$.




**Problema 04:** Sejam $a$ e $b$ dois números complexos não-nulos, tais que $a^2 + b^2 = 0$. Se $Z, W \in \mathbb{C}$ satisfazem

$$\begin{cases} \overline{z}\,w + z\,\overline{w} = 6a \\ \overline{z}\,w - z\,\overline{w} = 8b \end{cases}$$

determine o valor de $|a|$ de forma que $|zw| = 1$.

**Problema 05:**

a) Mostre que se uma matriz quadrada não-nula $A$ satisfaz a equação

$$A^3 + 3A^2 + 2A = 0 \qquad (1)$$

então $(A + I)^4 = A + I$, em que $I$ é a matriz identidade.

b) Sendo dado que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

satisfaz a equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas $B$ e $C$ tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações

$$(B - C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução $(x, y) \neq (0, 0)$? Justifique.

**Problema 06:** Sejam $n \geq 2$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e responda, justificando: Para todo $n \geq 2$, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2$?

**Problema 07:** Considere $n$ pontos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sobre uma circunferência de raio unitário, de forma que os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}, \ldots, \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ formam uma progressão geométrica de termo inicial $\pi$ e razão $\frac{1}{2}$. Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ teremos o comprimento do arco $\overset{\frown}{A_nA_1}$ menor que $\frac{1}{512}$ do comprimento da circunferência?

**Obs.:** Para todo arco $\overset{\frown}{A_kA_l}$, o comprimento considerado é o do arco que une o ponto $A_k$ ao ponto $A_l$ no sentido anti-horário.

**Problema 08:** Seja $S$ a área total da superfície de um cone circular reto de altura $h$, e seja $m$ a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça $h$ em função apenas de $S$ e $m$.

**Problema 09:** Considere o seguinte raciocínio de cunho cartesiano: "Se a circunferência de centro $C = (h, 0)$ e raio $r$ intercepta a curva $y = \sqrt{x}$, $x > 0$, no ponto $A = (a, \sqrt{a})$ de forma que o segmento $\overline{AC}$ seja perpendicular à reta tangente à curva em $A$, então $x = a$ é raiz dupla da equação em $x$ que se obtém da intersecção da curva com a circunferência." Use este raciocínio para mostrar que o coeficiente angular dessa reta tangente em $A$ é $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

**Problema 10:** Se $x$, $y$ e $z$ são os ângulos internos de um triângulo $ABC$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} z}{\cos y + \cos z}$, prove que o triângulo $ABC$ é retângulo.

## I.13 Vestibular 2001

**Questão 01:** Se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $3y^2 - y + a = 0$ tem raiz dupla, então a solução da equação $3^{2x+1} - 3^x + a = 0$ é:

(A) $\log_2 6$. (B) $-\log_2 6$. (C) $\log_3 6$. (D) $-\log_3 6$. (E) $1 - \log_3 6$.

**Questão 02:** O valor da soma $a + b$ para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão $1/2$ é:

(A) 36. (B) 41. (C) 26. (D) $-27$. (E) $-20$.

**Questão 03:** Se $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z.\overline{w} = 1$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é um argumento de $z.w$, então $\alpha$ é igual a:

(A) $\frac{\pi}{3}$. (B) $\pi$. (C) $\frac{2\pi}{3}$. (D) $\frac{5\pi}{3}$. (E) $\frac{3\pi}{2}$.

**Questão 04:** O número complexo $z = \dfrac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a \cos a} + i\,\dfrac{1 - 2\cos a + 2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a}$, $a \in ]0, \pi/2[$ tem argumento $\pi/4$. Neste caso, $a$ é igual a:

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{5}$. (E) $\frac{\pi}{9}$.

**Questão 05:** Um triângulo tem lados medindo 3, 4 e 5 centímetros. A partir dele, constroi-se uma sequência de triângulos do seguinte modo: os pontos médios dos lados de um triângulo são os vértices do seguinte. Dentre as alternativas abaixo, o valor em centímetros quadrados que está mais próximo da soma das áreas dos 78 primeiros triângulos assim construídos, incluindo o triângulo inicial, é:

(A) 8. (B) 9. (C) 10. (D) 11. (E) 12.

**Questão 06:** Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em $x$ e $y$, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x + y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de $m$ elementos, tomados 2 a 2, é:

(A) 80. (B) 90. (C) 70. (D) 100. (E) 60.

**Questão 07:** A respeito das combinações $a_n = \binom{2n}{n}$ e $b_n = \binom{2n}{n-1}$ temos que, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

(A) $\frac{n!}{n-1}\,a_n$. (B) $\frac{2n}{n+1}\,a_n$. (C) $\frac{n}{n+1}\,a_n$. (D) $\frac{2}{n+1}\,a_n$. (E) $\frac{1}{n+1}\,a_n$.

**Questão 08:** Sejam $A$ e $B$ matrizes $n \times n$, e $B$ uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:

I. $AB + BA^t$ é simétrica;

II. $(A + A^t + B)$ é simétrica;

III. $ABA^t$ é simétrica,

temos que:

(A) apenas I é verdadeira.
(B) apenas II é verdadeira.
(C) apenas III é verdadeira.
(D) apenas I e III são verdadeiras.
(E) todas as afirmações são verdadeiras.

**Questão 09:** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de $A$ é:

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

**Questão 10:** Sendo $\alpha$ e $\beta$ os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $\operatorname{sen}^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$, então $\operatorname{sen}\alpha$ é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{8}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{8}}{1}$. (E) zero.

**Questão 11:** O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e da geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é $128\pi$ m$^3$, temos que o raio da base e a altura do cone, medem, respectivamente, em metros:

(A) 9 e 8. (B) 8 e 6. (C) 8 e 7. (D) 9 e 6. (E) 10 e 8.

**Questão 12:** De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

(A) 63. (B) 65. (C) 66. (D) 70. (E) 77.

**Questão 13:** Seja o ponto $A = (r, 0)$, $r > 0$. O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de $P$ a $A$ e o dobro do quadrado da distância de $P$ à reta $y = -r$ é:

(A) uma circunferência centrada em $(r, -2r)$ com raio $r$.
(B) uma elipse centrada em $(r, -2r)$ com semi-eixos valendo $r$ e $2r$.
(C) uma parábola com vértice em $(r, -r)$.
(D) duas retas paralelas distando $r\sqrt{3}$ uma da outra.
(E) uma hipérbole centrada em $(r, -2r)$ com semi-eixos valendo $r$.

**Questão 14:** Sejam $X$, $Y$ e $Z$ subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$, não-vazios. Com respeito às afirmações:

I. $X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C]\} = X$;
II. Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)] = X \cup Y$;
III. Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$,

temos que:

(A) apenas I é verdadeira.
(B) apenas I e II são verdadeiras.
(C) apenas I e III são verdadeiras.
(D) apenas II e III são verdadeiras.
(E) todas são verdadeiras.

**Questão 15:** Se $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ é tal que, $\forall x \in ]0,1[$, $|f(x)| < \frac{1}{2}$ e $f(x) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$, então a desigualdade válida para qualquer $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $0 < x < 1$ é:

(A) $|f(x)| + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2^n} \leq |f(x)| \leq \frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2^{n+1}} < |f(x)| < \frac{1}{2}$.
(D) $|f(x)| > \frac{1}{2^n}$. (E) $|f(x)| < \frac{1}{2^n}$.

**Questão 16:** Considere as funções $f(x) = \frac{5+7^x}{4}$, $g(x) = \frac{5-7^x}{4}$ e $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x$. Se $a$ é tal que $h(f(a)) + h(g(a)) = \pi/4$, então $f(a) - g(a)$ vale:

(A) 0. (B) 1. (C) $\frac{7}{4}$. (D) $\frac{7}{2}$. (E) 7.

**Questão 17:** O conjunto de todos os valores de $m$ para os quais a função $f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$ está definida e é não-negativa para todo $x$ real é:

(A) $\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$. (B) $\left]\frac{1}{4}, \infty\right[$. (C) $\left]0, \frac{7}{4}\right[$. (D) $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$. (E) $\left]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$.

**Questão 18:** A parte imaginária de $[(1+\cos 2x) + i \operatorname{sen} 2x]^k$, $k$ inteiro positivo, $x$ real, é:

(A) $2.\operatorname{sen}^k x.\cos^k x$. (B) $\operatorname{sen}^k x.\cos^k x$. (C) $2^k.\operatorname{sen} kx.\cos^k x$.
(D) $2^k.\operatorname{sen}^k x.\cos^k x$. (E) $\operatorname{sen} kx.\cos^k x$.

**Questão 19:** O polinômio com coeficientes reais $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e 1. Então, a soma dos coeficientes é igual a:

(A) $-4$. (B) $-6$. (C) $-1$. (D) 1. (E) 4.

**Questão 20:** Seja $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - (\log_4 m)y + 5z = 0 \\ (\log_2 m)x + y - 2z = 0 \\ x + y - (\log_2 m^2)z = 0 \end{cases}.$$

O produto dos valores de $m$ para os quais o sistema admite solução não-trivial é:

(A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 8. (E) $2\log_2 5$.

**Questão 21:** Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?

(A) 375. (B) 465. (C) 545. (D) 585. (E) 625.

**Questão 22:** Sendo dados $\ln(2\sqrt{4}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{8}\ldots\sqrt[n-1]{2n}) = a_n$ e $\ln(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\ldots\sqrt[n]{2n}) = b_n$ então, $\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} + \ldots + \frac{\ln 2n}{2n}$ é igual a:

(A) $a_n - 2b_n$. (B) $2a_n - b_n$. (C) $a_n - b_n$. (D) $b_n - a_n$. (E) $a_n + b_n$.

**Questão 23:** A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12 m$^3$, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

**Questão 24:** Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se $r$ é o raio da circunferência inscrita e $a$ é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é igual a:

(A) 12. (B) 11. (C) 10. (D) 9. (E) 8.

**Questão 25:** O coeficiente angular da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto $P = (8, 0)$ é:

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. (D) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. (E) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

## I.14 Vestibular 2000

**Questão 01:** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = 10^{3\cos 5x}$. Podemos afirmar que

(A) $f$ é injetora e par e $g$ é ímpar.
(B) $g$ é sobrejetora e $g \circ f$ é par.
(C) $f$ é bijetora e $g \circ f$ é ímpar.
(D) $g$ é par e $g \circ f$ é ímpar.
(E) $f$ é ímpar e $g \circ f$ é par.

**Questão 02:** Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito $X$. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A)+n(B)+n(C)$ é igual a

(A) 11. (B) 14. (C) 15. (D) 18. (E) 25.

**Questão 03:** Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!\,(20-n)!}\, x^n$ uma função real de variável real em que $n!$ indica o fatorial de $n$. Considere as afirmações:

I. $f(1) = 2$;

II. $f(-1) = 0$;

III. $f(-2) = 1$.

Podemos concluir que

(A) Somente as afirmações I e II são verdadeiras.
(B) Somente as afirmações II e III são verdadeiras.
(C) Apenas a afirmação I é verdadeira.
(D) Apenas a afirmação II é verdadeira.
(E) Apenas a afirmação III é verdadeira.

**Questão 04:** Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

(A) 144. (B) 180. (C) 240. (D) 288. (E) 360.

**Questão 05:** Sendo 1 e $1 + 2i$ raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais, então

(A) $b + c = 4$. (B) $b + c = 3$. (C) $b + c = 2$. (D) $b + c = 1$. (E) $b + c = 0$.

**Questão 06:** A soma das raízes reais positivas da equação $4^{x^2} - 5.2^{x^2} + 4 = 0$ vale

(A) 2. (B) 5. (C) $\sqrt{2}$. (D) 1. (E) $\sqrt{3}$.

**Questão 07:** Sendo $I$ um intervalo de números reais com extremidades em $a$ e $b$, com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de $I$. Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a

(A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{3}{2}$. (C) $\frac{7}{3}$. (D) $\frac{11}{6}$. (E) $\frac{7}{6}$.

**Questão 08:** Seja $S = [-2, 2]$ e considere as afirmações:

I. $\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x < 6$, para todo $x \in S$;

II. $\frac{1}{\sqrt{32 - 2^x}} < \frac{1}{\sqrt{32}}$, para todo $x \in S$;

III. $2^{2x} - 2^x \leq 0$, para todo $x \in S$.

Então, podemos dizer que

(A) apenas I é verdadeira.
(B) apenas III é verdadeira.
(C) somente I e II são verdadeiras.
(D) apenas II é falsa.
(E) todas as afirmações são falsas.

**Questão 09:** Seja $z_0$ o número complexo $1 + i$. Sendo $S$ o conjunto solução no plano complexo de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$, então o produto dos elementos de $S$ é igual a

(A) $4(1 - i)$. (B) $2(1 + i)$. (C) $2(1 - i)$. (D) $-2i$. (E) $2i$.

**Questão 10:** Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x - \cos\left(\frac{x - \pi}{2}\right)$.

Sobre $f$ podemos afirmar que:

(A) é uma função par.
(B) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi$.
(C) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.
(D) é uma função periódica de período fundamental $2\pi$.
(E) não é par, não é ímpar e não é periódica.

**Questão 11:** O valor de $n$ que torna a sequência $2+3n, -5n, 1-4n$ uma progressão aritmética pertence ao intervalo

(A) $[-2,-1]$. (B) $[-1,0]$. (C) $[0,1]$. (D) $[1,2]$. (E) $[2,3]$.

**Questão 12:** Considere um triângulo isósceles $ABC$, retângulo em $A$. Seja $D$ a intersecção da bissetriz do ângulo $A$ com o lado $\overline{BC}$ e $E$ um ponto da reta suporte do cateto $\overline{AC}$ de tal modo que os segmentos de reta $\overline{BE}$ e $\overline{AD}$ sejam paralelos. Sabendo que $\overline{AD}$ mede $\sqrt{2}$ cm, então a área do círculo inscrito no triângulo $EBC$ é

(A) $\pi(4-2\sqrt{3})$ cm$^2$. (B) $2\pi(3-2\sqrt{2})$ cm$^2$. (C) $3\pi(4-2\sqrt{3})$ cm$^2$.
(D) $4\pi(3-2\sqrt{2})$ cm$^2$. (E) $\pi(4-2\sqrt{2})$ cm$^2$.

**Questão 13:** A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A=(2,1)$ e $B=(3,-2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abscissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são

(A) $(-1/2,0)$ ou $(5,0)$. (B) $(-1/2,0)$ ou $(4,0)$. (C) $(-1/3,0)$ ou $(5,0)$.
(D) $(-1/3,0)$ ou $(4,0)$. (E) $(-1/5,0)$ ou $(3,0)$.

**Questão 14:** Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a 5 cm do eixo e separa na base um arco de $120^\circ$. Sendo de $30\sqrt{3}$ cm$^2$ a área da secção plana retangular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em cm$^3$,

(A) $30\pi-10\sqrt{3}$. (B) $30\pi-20\sqrt{3}$. (C) $20\pi-10\sqrt{3}$.
(D) $50\pi-25\sqrt{3}$. (E) $100\pi-75\sqrt{3}$.

**Questão 15:** Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}$ cm e raio da base de 2 cm está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a

(A) $\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$. (B) $\frac{9}{4}(\sqrt{2}-1)$. (C) $\frac{9}{4}(\sqrt{6}-1)$.
(D) $\frac{27}{8}(\sqrt{3}-1)$. (E) $\frac{27}{16}(\sqrt{3}-1)$.

**Questão 16:** Duas retas $r_1$ e $r_2$ são paralelas à reta $3x-y=37$ e tangentes à circunferência $x^2+y^2-2x-y=0$. Se $d_1$ é a distância de $r_1$ até a origem e $d_2$ a distância de $r_2$ até a origem, então $d_1+d_2$ é igual a

(A) $\sqrt{12}$. (B) $\sqrt{15}$. (C) $\sqrt{7}$. (D) $\sqrt{10}$. (E) $\sqrt{5}$.

**Questão 17:** Sabe-se que $x$ é um número real pertencente ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Então, o cosseno de $x$ é igual a

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{2}{7}$. (C) $\frac{5}{13}$. (D) $\frac{15}{26}$. (E) $\frac{13}{49}$.

**Questão 18:** Seja $P(x)$ um polinômio divisível por $x - 1$. Dividindo-o por $x^2 + x$, obtêm-se o quociente $Q(x) = x^2 - 3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4) = 10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a

(A) $-5$. (B) $-3$. (C) $-1$. (D) 1. (E) 3.

**Questão 19:** Considere as matrizes $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Se $X$ é solução de $M^{-1}NX = P$, então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a

(A) 35. (B) 17. (C) 38. (D) 14. (E) 29.

**Questão 20:** Sendo $x$ um número real positivo, considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} \log_{1/3} x & \log_{1/3} x^2 & 1 \\ 0 & -\log_3 x & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & \log_{1/3} x^2 \\ 1 & 0 \\ -3\log_{1/3} x & -4 \end{pmatrix}$. A soma de todos os valores de $x$ para os quais $(AB) = (AB)^t$ é igual a

(A) $\frac{25}{3}$. (B) $\frac{28}{3}$. (C) $\frac{32}{3}$. (D) $\frac{27}{2}$. (E) $\frac{25}{2}$.

**Questão 21:** Considere as matrizes reais $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ em que $a \neq 0$ e $a$, $b$ e $c$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sejam $\lambda_1$, $\lambda_2$ e $\lambda_3$ as raízes da equação $\det(M - \lambda I) = 0$. Se $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a$, então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a

(A) $\frac{21}{8}$. (B) $\frac{91}{9}$. (C) $\frac{36}{9}$. (D) $\frac{21}{16}$. (E) $\frac{91}{36}$.

**Questão 22:** Num triângulo acutângulo $ABC$, o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ mede 5 cm. Sabendo que $\hat{A} = \arccos\frac{3}{5}$ e $\hat{C} = \operatorname{arcsen}\frac{2}{\sqrt{5}}$, então a área do triângulo $ABC$ é igual a

(A) $\frac{5}{2}$ cm². (B) 12 cm². (C) 15 cm². (D) $2\sqrt{5}$ cm². (E) $\frac{25}{2}$ cm².

**Questão 23:** Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 4 cm. Seja $t$ a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de $t$ compreendido entre os lados do triângulo mede

(A) 1 cm. (B) 1,5 cm. (C) 2 cm. (D) 2,5 cm. (E) 3 cm.

**Questão 24:** Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[4]{9}}$ cm. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos obtidos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a

(A) $2\left(\sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{6}\right)$ cm. (B) $2\left(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{2}\right)$ cm. (C) $2\left(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{3}\right)$ cm.
(D) $2\left(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\right)$ cm. (E) $2\left(\sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{3}\right)$ cm.

**Questão 25:** Para $x$ no intervalo $[0, \pi/2]$, o conjunto de todas as soluções da inequação $\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ é o intervalo definido por

(A) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.
(D) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. (E) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$.

# I.15 Vestibular 1999

**Questão 01:** Sejam $E$, $F$, $G$ e $H$ subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Considere as afirmações:

I. Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $E \subset F$ e $G \subset H$;

II. Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$;

III. Se $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$.

Então:

(A) Apenas a afirmação I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmação II é verdadeira.
(C) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
(E) Todas as afirmações são verdadeiras.

**Questão 02:** Listando-se em ordem crescente todos os números de cinco algarismos distintos, formados com os elementos do conjunto $\{1, 2, 4, 6, 7\}$, o número 62417 ocupa o $n$-ésimo lugar. Então $n$ é igual a:

(A) 74. (B) 75. (C) 79. (D) 81. (E) 92.

**Questão 03:** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Considere as afirmações:

I. Os gráficos de $f$ e $g$ não se interceptam;

II. As funções $f$ e $g$ são crescentes;

III. $f(-2)g(-1) = f(-1)g(-2)$.

Então:

(A) Apenas a afirmação I é falsa.
(B) Apenas a afirmação III é falsa.
(C) Apenas as afirmações I e II são falsas.
(D) Apenas as afirmações II e III são falsas.
(E) Todas as afirmações são falsas.

**Questão 04:** Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 1$. O conjunto de todas as soluções reais da inequação $a^{2x(1-x)} > a^{x-1}$ é:

(A) $]-1, 1[$. (B) $]1, +\infty[$. (C) $]-\frac{1}{2}, 1[$. (D) $]-\infty, 1[$. (E) vazio.

**Questão 05:** Seja $S$ o conjunto de todas as soluções reais da equação $\log_{\frac{1}{4}}(x+1) = \log_4(x-1)$. Então:

(A) $S$ é um conjunto unitário e $S \subset ]2, +\infty[$.
(B) $S$ é um conjunto unitário e $S \subset ]1, 2[$.
(C) $S$ possui dois elementos distintos e $S \subset ]-2, 2[$.
(D) $S$ possui dois elementos distintos e $S \subset ]1, +\infty[$.
(E) $S$ é o conjunto vazio.

**Questão 06:** Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que a função composta $h \circ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função identidade. Considere as afirmações:

I. A função $h$ é sobrejetora;

II. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x_0) = 0$, então $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq x_0$;

III. A equação $h(x) = 0$ tem solução em $\mathbb{R}$.

Então:

(A) Apenas a afirmação I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmação II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmação III é verdadeira.
(D) Todas as afirmações são verdadeiras.
(E) Todas as afirmações são falsas.

**Questão 07:** Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Se $x$ e $y$ são soluções do sistema $(AA^t - 3I)X = B$, então $x + y$ é igual a:

(A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) $-1$. (E) $-2$.

**Questão 08:** Sejam $x$, $y$ e $z$ números reais com $y \neq 0$. Considere a matriz inversível $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Então:

(A) A soma dos termos da primeira linha de $A^{-1}$ é igual a $x + 1$.
(B) A soma dos termos da primeira linha de $A^{-1}$ é igual a 0.
(C) A soma dos termos da primeira coluna de $A^{-1}$ é igual a 1.
(D) O produto dos termos da segunda linha de $A^{-1}$ é igual a $y$.
(E) O produto dos termos da terceira coluna de $A^{-1}$ é igual a 1.

**Questão 09:** Se $x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right[$ é tal que $4\,\mathrm{tg}^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x$ é:

(A) $\frac{\sqrt{15}}{4}$. (B) $\frac{\sqrt{15}}{8}$. (C) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$. (D) $\frac{1}{2}$. (E) 1.

**Questão 10:** O conjunto de todos os números reais $q > 1$, para os quais $a_1$, $a_2$ e $a_3$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q$ e representam as medidas dos lados de um triângulo, é:

(A) $\left] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[$. (B) $\left] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$. (C) $\left] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right]$.

(D) $\left] 1, \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right[$. (E) $]1, 1+\sqrt{5}[$.

**Questão 11:** Sejam $a_k$ e $b_k$ números reais com $k = 1, 2, \ldots, 6$. Os números complexos $z_k = a_k + ib_k$ são tais que $|z_k| = 2$ e $b_k \geq 0$, para todo $k = 1, 2, \ldots, 6$. Se $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ é uma progressão aritmética de razão $-\frac{1}{5}$ e soma 9, então $z_3$ é igual a:

(A) $2i$. (B) $\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$. (C) $\sqrt{3} + i$. (D) $\frac{-3\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{73}}{5}i$. (E) $\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{17}}{5}i$.

**Questão 12:** Considere a circunferência $C$ de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ e a elipse $E$ de equação $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Então:

(A) $C$ e $E$ interceptam-se em dois pontos distintos.
(B) $C$ e $E$ interceptam-se em quatro pontos distintos.
(C) $C$ e $E$ são tangentes exteriormente.
(D) $C$ e $E$ são tangentes interiormente.
(E) $C$ e $E$ têm o mesmo centro e não se interceptam.

**Questão 13:** Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

(A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt[3]{5}-1}{3}$. (E) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

**Questão 14:** Duas circunferências $C_1$ e $C_2$, ambas com 1 m de raio, são tangentes. Seja $C_3$ outra circunferência cujo raio mede $(\sqrt{2}-1)$ m e que tangencia externamente $C_1$ e $C_2$. A área, em m$^2$, da região limitada e exterior às três circunferências dadas é:

(A) $1-\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{6}$. (C) $(\sqrt{2}-1)^2$.

(D) $\dfrac{\pi}{16}\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)$. (E) $\pi(\sqrt{2}-1)-1$.

**Questão 15:** Um poliedro convexo de 10 vértices apresenta faces triangulares e quadrangulares. O número de faces quadrangulares, o número de faces triangulares e o número total de faces formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O número de arestas é:

(A) 10. (B) 17. (C) 20. (D) 22. (E) 23.

**Questão 16:** Considere as funções $f$ e $g$ definidas por $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$, para $x\neq 0$, e $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$, para $x\neq -1$. O conjunto de todas as soluções da inequação $(g\circ f)(x)<g(x)$ é:

(A) $[1,+\infty[$. (B) $]-\infty,-2[$. (C) $[-2,-1[$.

(D) $]-1,1[$. (E) $]-2,-1[\cup]1,+\infty[$.

**Questão 17:** Seja $a\in\mathbb{R}$ com $a>1$. Se $b=\log_2 a$, então o valor de $\log_4 a^3+\log_2 4a+\log_2\dfrac{a}{a+1}+(\log_8 a)^2-\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{a^2-1}{a-1}$ é:

(A) $2b-3$. (B) $\dfrac{65}{18}b+2$. (C) $\dfrac{2b^2-3b+1}{2}$.

(D) $\dfrac{2b^2+63b+36}{18}$. (E) $\dfrac{b^2+9b+7}{9}$.

**Questão 18:** Seja $p(x)$ um polinômio de grau 3 tal que $p(x)=p(x+2)-x^2-2$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Se $-2$ é uma raiz de $p(x)$, então o produto de todas as raízes de $p(x)$ é:

(A) 36. (B) 18. (C) $-36$. (D) $-18$. (E) 1.

**Questão 19:** A equação polinomial $p(x)=0$ de coeficientes reais e grau 6 é recíproca de 2ª espécie e admite $i$ como raiz. Se $p(2)=-\dfrac{105}{8}$ e $p(-2)=\dfrac{255}{8}$, então a soma de todas as raízes de $p(x)$ é igual a:

(A) 10. (B) 8. (C) 6. (D) 2. (E) 1.

**Questão 20:** O conjunto de todos os números complexos $z$, $z \neq 0$, que satisfazem a igualdade $|z + 1 + i| = ||z| - |1 + i||$ é:

(A) $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(B) $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(C) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ e } \arg z = \frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(D) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{2} \text{ e } \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(E) $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

**Questão 21:** Seja $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < \frac{\pi}{2}$. A expressão

$$\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + a\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - a\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

é idêntica a:

(A) $\frac{\sqrt{2}\cotg^2 a}{1+\cotg^2 a}$. (B) $\frac{\sqrt{2}\cotg a}{1+\cotg^2 a}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{1+\cotg^2 a}$. (D) $\frac{1+3\cotg a}{2}$. (E) $\frac{1+2\cotg a}{1+\cotg a}$.

**Questão 22:** A soma de todos os valores de $a \in [0, 2\pi[$ que tornam o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \operatorname{sen} a + y \cos a + z(2 \operatorname{sen} a + \cos a) = 0 \\ x \operatorname{sen}^2 a + y \cos^2 a + z(1 + 3\operatorname{sen}^2 a + 2 \operatorname{sen} 2a) = 0 \end{cases}$ possível e indeterminado é:

(A) $5\pi$. (B) $4\pi$. (C) $3\pi$. (D) $2\pi$. (E) $\pi$.

**Questão 23:** Pelo ponto $C : (4, -4)$ são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y = (x - 4)^2 + 2$ nos pontos $A$ e $B$. A distância do ponto $C$ à reta determinada por $A$ e $B$ é:

(A) $6\sqrt{12}$. (B) $\sqrt{12}$. (C) 12. (D) 8. (E) 6.

**Questão 24:** Duas circunferências de raios iguais a 9 m e 3 m são tangentes externamente num ponto $C$. Uma reta tangencia estas duas circunferências nos pontos distintos $A$ e $B$. A área, em m$^2$, do triângulo $ABC$ é:

(A) $27\sqrt{3}$. (B) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$. (C) $9\sqrt{3}$. (D) $27\sqrt{2}$. (E) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$.

**Questão 25:** Um triedro tri-retângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8 m, 10 m e 12 m. O volume, em m$^3$, do sólido formado é:

(A) $15\sqrt{6}$. (B) $5\sqrt{30}$. (C) $6\sqrt{15}$. (D) $30\sqrt{6}$. (E) $45\sqrt{6}$.

## I.16 Vestibular 1998

**Questão 01:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x$. Então:

(A) $f$ é ímpar e periódica de período $\pi$.
(B) $f$ é par e periódica de período $\pi/2$.
(C) $f$ não é par nem ímpar e é periódica de período $\pi$.
(D) $f$ não é par e é periódica de período $\pi/4$.
(E) $f$ não é ímpar e não é periódica.

**Questão 02:** O valor de $\operatorname{tg}^{10} x - 5\operatorname{tg}^{8} x \sec^2 x + 10\operatorname{tg}^{6} x \sec^4 x - 10\operatorname{tg}^{4} x \sec^6 x + 5\operatorname{tg}^{2} x \sec^8 x - \sec^{10} x$, para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, é:

(A) 1. (B) $\dfrac{-\sec^2 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$. (C) $-\sec x + \operatorname{tg} x$. (D) $-1$. (E) zero.

**Questão 03:** Sejam $A$ e $B$ matrizes reais quadradas de ordem 2 que satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz $M$ inversível tal que: $A = M^{-1}BM$. Então:

(A) $\det(-A^t) = \det B$.
(B) $\det A = -\det B$.
(C) $\det(2A) = 2\det B$.
(D) Se $\det B \neq 0$ então $\det(-AB) < 0$.
(E) $\det(A - I_2) = -\det(I_2 - B)$.

**Questão 04:** Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

(A) $\sqrt{3}$. (B) 5. (C) $\pi$. (D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. (E) $2\pi$.

**Questão 05:** Sejam $x$ e $y$ números reais tais que: $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$. Então, o número complexo $z = x + iy$ é tal que $z^3$ e $|z|$ valem, respectivamente:

(A) $1 - i$ e $\sqrt[6]{2}$. (B) $1 + i$ e $\sqrt[6]{2}$. (C) $i$ e 1. (D) $-i$ e 1. (E) $1 + i$ e $\sqrt{2}$.

**Questão 06:** Seja $ABC$ um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$. Sobre o lado $\overline{AC}$ deste triângulo considere um ponto $D$ tal que os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ e $\overline{BC}$ são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

(A) 23°. (B) 32°. (C) 36°. (D) 40°. (E) 45°.

**Questão 07:** Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão $a_1$, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

(A) $\frac{8}{27}$. (B) $\frac{20}{27}$. (C) $\frac{26}{27}$. (D) $\frac{30}{27}$. (E) $\frac{38}{27}$.

**Questão 08:** O valor de $y \in \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{\sqrt{y}} 7$ é:

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) 3. (D) $\frac{1}{8}$. (E) 7.

**Questão 09:** O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:

(A) $12!$. (B) $(8!)(5!)$. (C) $12! - (8!)(5!)$. (D) $12! - 8!$. (E) $12! - (7!)(5!)$.

**Questão 10:** Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de $45°$. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

(A) $\sqrt{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\sqrt{6}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**Questão 11:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = -3a^x$, onde $a$ é um número real, $0 < a < 1$. Sobre as afirmações:

I. $f(x + y) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$;
II. $f$ é bijetora;
III. $f$ é crescente e $f(]0, +\infty[) = ]-3, 0[$.

Podemos concluir que:

(A) Todas as afirmações são falsas.
(B) Todas as afirmações são verdadeiras.
(C) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
(D) Apenas a afirmação II é verdadeira.
(E) Apenas a afirmação III é verdadeira.

**Questão 12:** Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $f(x) = x^2 - 9$ e $(f \circ g)(x) = x - 6$, em seus respectivos domínios. Então, o domínio $A$ da função $g$ é:

(A) $[-3, +\infty[$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $[-5, +\infty[$. (D) $]-\infty, -1[ \cup [3, +\infty[$. (E) $]-\infty, \sqrt{6}[$.

**Questão 13:** Considere $a, b \in \mathbb{R}$ e a equação $2e^{3x} + ae^{2x} + 7e^{x} + b = 0$. Sabendo que as três raízes reais $x_1, x_2, x_3$ desta equação formam, nesta ordem, uma progressão aritmética cuja soma é igual a zero, então $a - b$ vale:

(A) 5. (B) $-7$. (C) $-9$. (D) $-5$. (E) 9.

**Questão 14:** Seja $a$ um número real tal que o polinômio $p(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - ax^2 - 2x - 1$ admite apenas raízes reais. Então:

(A) $a \in [2, \infty[$. (B) $a \in [-1, 1]$. (C) $a \in ]-\infty, -7]$.
(D) $a \in [-2, -1[$. (E) $a \in ]1, 2[$.

**Questão 15:** Seja $p(x)$ um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de $p(x)$ por $x - 2$ obtém-se um quociente $q(x)$ e resto igual a 26. Na divisão de $p(x)$ por $x^2 + x - 1$ obtém-se um quociente $h(x)$ e resto $8x - 5$. Sabe-se que $q(0) = 13$ e $q(1) = 26$. Então, $h(2) + h(3)$ é igual a:

(A) 16. (B) zero. (C) $-47$. (D) $-28$. (E) 1.

**Questão 16:** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere os sistemas lineares em $x$, $y$ e $z$:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - by + 3z = 0 \end{cases}.$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

(A) $\frac{a}{b} = 11$. (B) $\frac{b}{a} = 22$. (C) $ab = \frac{1}{4}$. (D) $ab = 22$. (E) $ab = 0$.

**Questão 17:** Sejam as matrizes reais de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} 2 + a & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 + a \end{bmatrix}$. Então, a soma dos elementos da diagonal principal de $(AB)^{-1}$ é igual a:

(A) $a + 1$. (B) $4(a + 1)$. (C) $\frac{1}{4}(5 + 2a + a^2)$.
(D) $\frac{1}{4}(1 + 2a + a^2)$. (E) $\frac{1}{2}(5 + 2a + a^2)$.

**Questão 18:** A inequação $4x \log_5(x + 3) \geq (x^2 + 3) \log_{\frac{1}{5}}(x + 3)$ é satisfeita para todo $x \in S$. Então:

(A) $S = ]-3, -2] \cup [-1, +\infty[$.
(B) $S = ]-\infty, -3[ \cup [-1, +\infty[$.
(C) $S = ]-3, -1]$.
(D) $S = ]-2, +\infty[$.
(E) $S = ]-\infty, -3[ \cup ]-3, +\infty[$.

**Questão 19:** A soma das raízes da equação $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 0$, que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$, é:

(A) $\frac{17\pi}{4}$. (B) $\frac{16\pi}{3}$. (C) $\frac{15\pi}{4}$. (D) $\frac{14\pi}{3}$. (E) $\frac{13\pi}{4}$.

**Questão 20:** Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I. Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados;
II. Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados;
III. Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

Então:

(A) Todas as afirmações são verdadeiras.
(B) Apenas I e III são verdadeiras.
(C) Apenas I é verdadeira.
(D) Apenas III é verdadeira.
(E) Apenas II e III são verdadeiras.

**Questão 21:** As retas $y = 0$ e $4x + 3y + 7 = 0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4 cm e 6 cm, então, a área deste paralelogramo, em $cm^2$, vale:

(A) $\frac{36}{5}$. (B) $\frac{27}{4}$. (C) $\frac{44}{3}$. (D) $\frac{48}{3}$. (E) $\frac{48}{5}$.

**Questão 22:** Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido, dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo $m$ e $n$, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:

(A) $m = 9, n = 7$. (B) $m = n = 9$. (C) $m = 8, n = 10$.
(D) $m = 10, n = 8$. (E) $m = 7, n = 9$.

**Questão 23:** Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $\sqrt{5}$ cm e o diâmetro da base mede 2 cm. Traçam-se $n$ planos paralelos à base do cone, que o seccionam determinando $n+1$ cones, incluindo o original, de modo que a razão entre os volumes do cone maior e do cone menor é 2. Os volumes destes cones formam uma progressão aritmética crescente cuja soma é igual a $2\pi$. Então, o volume, em cm$^4$, do tronco de cone determinado por dois planos consecutivos é igual a:

(A) $\frac{\pi}{33}$. (B) $\frac{2\pi}{33}$. (C) $\frac{\pi}{9}$. (D) $\frac{2\pi}{15}$. (E) $\pi$.

**Questão 24:** Considere a hipérbole $H$ e a parábola $T$, cujas equações são, respectivamente, $5(x+3)^2 - 4(y-2)^2 = -20$ e $(y-3)^2 = 4(x-1)$. Então, o lugar geométrico dos pontos $P$, cuja soma dos quadrados das distâncias de $P$ a cada um dos focos da hipérbole $H$ é igual ao triplo do quadrado da distância de $P$ ao vértice da parábola $T$, é:

(A) A elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.

(B) A hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$.

(C) O par de retas dadas por $y = \pm(3x-1)$.

(D) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$.

(E) A circunferência centrada em $(9,5)$ e raio $\sqrt{120}$.

**Questão 25:** Considere o paralelogramo $ABCD$ onde $A(0,0)$, $B(-1,2)$ e $C(3,-4)$. Os ângulos internos distintos e o vértice $D$ deste paralelogramo são, respectivamente,

(A) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e $D = (-2,-5)$.

(B) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e $D = (-1,-5)$.

(C) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e $D = (-2,-6)$.

(D) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e $D = (-2,-6)$.

(E) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e $D = (-2,-5)$.

# I.17 Vestibular 1997

**Questão 01:** Se $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ representam, respectivamente, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 1, \text{ se } x \in \mathbb{I} \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ se } x \in \mathbb{I} \end{cases}$.
Seja $J$ a imagem da função composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Podemos afirmar que:
(A) $J = \mathbb{R}$. (B) $J = \mathbb{Q}$. (C) $J = \{0\}$. (D) $J = \{1\}$. (E) $J = \{0, 1\}$.

**Questão 02:** Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$ fixado. Considere o conjunto $A = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 < q < n \right\}$. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = |\cos(n! \pi x)|^{2n}$.
Se $f(A)$ denota a imagem do conjunto $A$ pela função $f$, então
(A) $f(A) = ]-1, 1[$. (B) $f(A) = [0, 1]$. (C) $f(A) = \{1\}$.
(D) $f(A) = \{0\}$. (E) $f(A) = \{0, 1\}$.

**Questão 03:** O domínio $D$ da função $f(x) = \ln \left[ \frac{\sqrt{\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x} \right]$ é o conjunto
(A) $D = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 3\pi/2\}$.
(B) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 1/\pi \text{ ou } x > \pi\}$.
(C) $D = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1/\pi \text{ ou } x \geq \pi\}$.
(D) $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
(E) $D = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1/\pi \text{ ou } \pi < x < 3\pi/2\}$.

**Questão 04:** Considere os números complexos $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = 1 - i\sqrt{3}$.
Se $m = \left| \frac{w^6 + 3z^4 + 4i}{z^2 + w^3 + 6 - 2i} \right|^2$, então $m$ vale
(A) 34. (B) 26. (C) 16. (D) 4. (E) 1.

**Questão 05:** Seja $m \in \mathbb{R}_+^*$ tal que a reta $x - 3y - m = 0$ determina, na circunferência $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, uma corda de comprimento 6. O valor de $m$ é
(A) $10 + 4\sqrt{10}$. (B) $2 + \sqrt{3}$. (C) $5 - \sqrt{2}$. (D) $6 + \sqrt{10}$. (E) 3.

**Questão 06:** Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{R}_+^*$ com $m \geq 10$ e $x \in \mathbb{R}_+^*$. Seja $D$ o desenvolvimento do binômio $(a + b)^m$, ordenado segundo as potências crescentes de $b$. Quando $a = x^n$ e $b = x^{-n^2}$, o sexto termo de $D$ fica independente de $x$. Quando $a = x$ e $b = x^{-1/n}$, o oitavo termo de $D$ se torna independente de $x$. Então $m$ é igual a
(A) 10. (B) 12. (C) 14. (D) 16. (E) 18.

**Questão 07:** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ com $a^2 = b^2 + c^2$. Se $x$, $y$ e $z$ satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} c\cos y + b\cos z &= a \\ c\cos x + a\cos z &= b \\ b\cos x + a\cos y &= c \end{aligned}$$

então $\cos x + \cos y + \cos z$ é igual a

(A) $(a-b)/c$. (B) $(a+b)/c$. (C) $(b+c)/a$. (D) $(c+a)/b$. (E) $(b^2+c^2)/a$.

**Questão 08:** Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes reais, quadradas de ordem $n$ e não nulas. Por $0$ denotamos a matriz nula de ordem $n$. Se $AB = AC$, considere as afirmações:

I. $A^2 \neq 0$;

II. $B = C$;

III. $\det B \neq 0$;

IV. $\det(B - C) = 0$.

Então

(A) todas são falsas.
(B) apenas a afirmação I é verdadeira.
(C) apenas a afirmação II é verdadeira.
(D) apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
(E) apenas a afirmação III é verdadeira.

**Questão 09:** Seja $\theta$ um valor fixado no intervalo $]0, \pi/2[$. Sabe-se que $a_1 = \cotg\theta$ é o primeiro termo de uma progressão geométrica infinita de razão $q = \operatorname{sen}^2\theta$. A soma de todos os termos dessa progressão é

(A) $\operatorname{cosec}\theta \operatorname{tg}\theta$. (B) $\sec\theta \operatorname{tg}\theta$. (C) $\sec\theta \operatorname{cosec}\theta$. (D) $\sec^2\theta$. (E) $\operatorname{cosec}^2\theta$.

**Questão 10:** Seja $A$ o ponto de intersecção das retas $r$ e $s$ dadas, respectivamente, pelas equações $x + y = 3$ e $x - y = -3$. Sejam $B$ e $C$ pontos situados no primeiro quadrante com $B \in r$ e $C \in s$. Sabendo que $m(\overline{AB}) = m(\overline{AC}) = \sqrt{2}$, então a reta passando por $B$ e $C$ é dada pela equação

(A) $2x - 3y = 1$. (B) $y = 1$. (C) $y = 2$. (D) $x = 1$. (E) $x = 2$.

**Questão 11:** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x) = 1 - x$ e $f(x) + 2f(2 - x) = (x - 1)^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $f[g(x)]$ é igual a

(A) $(x-1)^3$. (B) $(1-x)^3$. (C) $x^3$. (D) $x$. (E) $2 - x$.

**Questão 12:** Seja $S$ o conjunto de todas as raízes da equação $2x^4 - 1x^3 + 4x - 2 = 0$. Sobre os elementos de $S$ podemos afirmar que

(A) todos são números reais.
(B) 4 são números reais positivos.
(C) 4 não são números reais.
(D) 3 são números reais positivos e 2 não são reais.
(E) 3 são números reais negativos.

**Questão 13:** Sejam $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ polinômios na variável real $x$ de graus $n_1$, $n_2$ e $n_3$, respectivamente, com $n_1 > n_2 > n_3$. Sabe-se que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $p_3(x)$. Seja $r(x)$ o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$. Considere as afirmações:

I. $r(x)$ é divisível por $p_3(x)$;
II. $p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$;
III. $p_1(x)r(x)$ é divisível por $[p_3(x)]^2$.

Então,

(A) apenas I e II são verdadeiras.
(B) apenas II é verdadeira.
(C) apenas I e III são verdadeiras.
(D) todas as afirmações são verdadeiras.
(E) todas as afirmações são falsas.

**Questão 14:** Em um triângulo $ABC$, sabe-se que o segmento $\overline{AC}$ mede 2 cm. Sejam $\alpha$ e $\beta$, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. A área do triângulo é (em cm$^2$) igual a

(A) $2\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{sen} 2\alpha$.
(B) $2\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{tg}\beta - \operatorname{sen} 2\alpha$.
(C) $2\cos^2\alpha \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{sen} 2\alpha$.
(D) $2\cos^2\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{sen} 2\alpha$.
(E) $2\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{tg}\beta - \cos 2\alpha$.

**Questão 15:** Considere, no plano complexo, um hexágono regular centrado em $z_0 = i$. Represente por $z_1, z_2, \ldots, z_6$, seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1 = 1$ então $2z_3$ é igual a

(A) $2 + 4i$. (B) $(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 3)i$. (C) $\sqrt{6} + (\sqrt{2} + 2)i$.
(D) $(2\sqrt{3} - 1) + (2\sqrt{3} + 3)i$. (E) $\sqrt{2} - (\sqrt{6} + 2)i$.

**Questão 16:** Seja $S$ o conjunto dos números complexos que satisfazem, simultaneamente, as equações: $|z - 3i| = 3$ e $|z + i| = |z - 2 - i|$. O produto de todos os elementos de $S$ é igual a

(A) $-2 + i\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$. (C) $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$.
(D) $3 - 3i$. (E) $-2 + 2i$.

**Questão 17:** Sejam $a_1$, $a_2$, $a_3$ e $a_4$ números reais formando, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente com $a_1 \neq 0$. Sejam $x_1$, $x_2$ e $x_3$ as raízes da equação $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Se $x_1 = 2i$, então

(A) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$. (B) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. (C) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$.
(D) $x_1x_2x_3 = 8$. (E) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$.

**Questão 18:** Os números reais $x$, $y$ e $z$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $r$. Seja $a$ um número real com $a > 0$ e $a \neq 1$ satisfazendo $3a^x + 2a^y - a^z = 0$. Então $r$ é igual a

(A) $a^2$. (B) $(1/2)^a$. (C) $\log_{2a} 4$. (D) $\log_a(3/2)$. (E) $\log_a 3$.

**Questão 19:** A sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ é uma progressão geométrica de razão $q \in \mathbb{R}^*$ com $q \neq 1$ e $a_1 \neq 0$. Com relação ao sistema $\begin{cases} a_1x + a_2y = c \\ a_3x + a_4y = d \end{cases}$ podemos afirmar que

(A) é impossível para $c, d \in \{-1, 1\}$.
(B) é possível e determinado somente se $c = d$.
(C) é indeterminado quaisquer que sejam $c, d \in \mathbb{R}$.
(D) é impossível quaisquer que sejam $c, d \in \mathbb{R}^*$.
(E) é indeterminado somente se $d = cq^2$.

**Questão 20:** Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sejam $\lambda_0$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ as raízes da equação $\det(A - \lambda I_3) = 0$ com $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Considere as afirmações:

I. $B = A - \lambda_0 I_3$;
II. $B = (A - \lambda_1 I_3)A$;
III. $B = A(A - \lambda_2 I_3)$.

Então

(A) todas as afirmações são falsas.
(B) todas as afirmações são verdadeiras.
(C) apenas I é falsa.
(D) apenas II é falsa.
(E) apenas III é verdadeira.

**Questão 21:** Seja $S$ o conjunto de todas as soluções reais da equação $\sec\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{1+e^x} - \operatorname{arctg}(1-e^x)\right] = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Então

(A) $S = \emptyset$. (B) $S = \mathbb{R}$. (C) $S \subset [1,2]$. (D) $S \subset [-1,1]$. (E) $S = [-1,2]$.

**Questão 22:** Dado um número real $a$ com $a > 1$, seja $S$ o conjunto solução da inequação $\log_{1/a}\log_a\left(\frac{1}{a}\right)^{x^2-x} \leq \log_{1/a}(x-1)$. Então $S$ é o intervalo

(A) $[4,+\infty[$. (B) $[4,7[$. (C) $]1,5]$. (D) $]1,4[$. (E) $]1,4]$.

**Questão 23:** Considere os pontos $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ e $C = (0,3)$. Seja $P(x,y)$ o ponto de intersecção das bissetrizes internas do triângulo $ABC$. Então $x + y$ é igual a

(A) $12/(5+\sqrt{13})$. (B) $8/(2+\sqrt{11})$. (C) $10/(6+\sqrt{13})$. (D) $5$. (E) $2$.

**Questão 24:** A altura e o raio da base de um cone de revolução medem 1 cm e 5 cm respectivamente. Por um ponto do eixo do cone situado a $d$ cm de distância do vértice, traçamos um plano paralelo à base, obtendo um tronco de cone. O volume deste tronco é a média geométrica entre os volumes do cone dado e do cone menor formado. Então $d$ é igual a

(A) $\sqrt[3]{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$. (B) $\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$. (C) $\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$. (D) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$. (E) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$.

**Questão 25:** Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem $a$ cm e $2a$ cm. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em cm) do tronco mede

(A) $(a\sqrt{3})/\sqrt{5}$. (B) $(a\sqrt{35})/10$. (C) $(a\sqrt{3})/(2\sqrt{5})$.
(D) $(a\sqrt{35})/\sqrt{10}$. (E) $(a\sqrt{7})/\sqrt{5}$.

## I.18 Vestibular 1996

**Questão 01:** Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e considere a matriz $A$:

$$A = \begin{bmatrix} \log_a(3a) & \log_{10}(3a)^2 \\ \log_a\left(\frac{1}{a}\right) & -\log_a(a) \\ \log_a(1) & \log_{10}(1) \end{bmatrix}.$$

Para que a característica de $A$ seja máxima, o valor de $a$ deve ser tal que:

(A) $a \neq 10$ e $a \neq \frac{1}{3}$. (B) $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq \frac{1}{3}$. (C) $a \neq 5$ e $a \neq 10$.
(D) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{3}$. (E) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{10}$.

**Questão 02:** Sejam $A$ e $B$ subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, e considere as seguintes afirmações:

I. $(A \setminus B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \emptyset$;

II. $(A \setminus B^C)^C = B \setminus A^C$;

III. $[(A^C \setminus B) \cap (B \setminus A)]^C = A$.

Sobre essas afirmações podemos garantir que:

(A) apenas a afirmação I é verdadeira.
(B) apenas a afirmação II é verdadeira.
(C) apenas a afirmação III é verdadeira.
(D) todas as afirmações são verdadeiras.
(E) apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

**Questão 03:** Numa pirâmide triangular regular, a área da base é igual ao quadrado da altura $H$. Seja $R$ o raio da esfera inscrita nesta pirâmide. Deste modo, a razão $\frac{H}{R}$ é igual a:

(A) $\sqrt{\sqrt{3}+1}$. (B) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$. (C) $1+\sqrt{3\sqrt{3}+1}$.
(D) $1-\sqrt{3\sqrt{3}-1}$. (E) $\sqrt{3}+1$.

**Questão 04:** Dadas as afirmações:

I. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$;

II. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$;

III. Existem mais possibilidades de escolher 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 do que escolher 6 números diferentes entre os inteiros de 1 a 50.

Conclui-se que:

(A) todas são verdadeiras.
(B) apenas I e II são verdadeiras.
(C) apenas I é verdadeira.
(D) apenas II é verdadeira.
(E) apenas II e III são verdadeiras.

**Questão 05:** Considere o polinômio $p(z) = z^6 + 2z^5 + 6z^4 + 12z^3 - 8z^2 + 16z$. Sobre as raízes da equação $p(z) = 0$, podemos afirmar que:

(A) apenas uma é real.
(B) apenas duas raízes são reais e distintas.
(C) apenas duas raízes são reais e iguais.
(D) quatro raízes são reais, sendo duas a duas distintas.
(E) quatro raízes são reais, sendo apenas duas iguais.

**Questão 06:** Seja $a \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ um número real dado. A solução $(x_0, y_0)$ do sistema de equações

$$\begin{cases} (\operatorname{sen} a)x - (\cos a)y = -\operatorname{tg} a \\ (\cos a)x - (\operatorname{sen} a)y = -1 \end{cases}$$

é tal que:

(A) $x_0 \cdot y_0 = \operatorname{tg} a$. (B) $x_0 \cdot y_0 = -\sec a$. (C) $x_0 \cdot y_0 = 0$.
(D) $x_0 \cdot y_0 = \operatorname{sen}^2 a$. (E) $x_0 \cdot y_0 = \operatorname{sen} a$.

**Questão 07:** Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função injetora tal que $f(1) = 0$ e $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para todo $x > 0$ e $y > 0$. Se $x_1, x_2, x_3, x_4$ e $x_5$ formam nessa ordem uma progressão geométrica, onde $x_i > 0$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e sabendo que $\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 13f(2) + 2f(x_1)$ e $\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}\right) = -2f(2x_1)$, então, o valor de $x_1$ é:

(A) $-2$. (B) $2$. (C) $3$. (D) $4$. (E) $1$.

**Questão 08:** Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio $R$ e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre estas arestas paralelas será:

(A) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}R$. (B) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}R$. (C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$. (D) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}R$. (E) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$.

**Questão 09:** Tangenciando externamente a elipse $\mathcal{E}_1$, tal que $\mathcal{E}_1 : 9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$, considere uma elipse $\mathcal{E}_2$, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de $\mathcal{E}_1$ e cujos eixos têm a mesma medida que os eixos de $\mathcal{E}_1$. Sabendo que $\mathcal{E}_2$ está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de $\mathcal{E}_2$ é:

(A) $(7,3)$. (B) $(8,2)$. (C) $(8,3)$. (D) $(9,3)$. (E) $(9,2)$.

**Questão 10:** São dadas as parábolas $p_1 : y = -x^2 - 4x - 1$ e $p_2 : y = x^2 - 3x + \frac{11}{4}$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por $V_1$ e $V_2$. Sabendo que $r$ é a reta que contém $V_1$ e $V_2$, então a distância de $r$ até a origem é:

(A) $\frac{5}{\sqrt{26}}$. (B) $\frac{7}{\sqrt{26}}$. (C) $\frac{7}{\sqrt{50}}$. (D) $\frac{17}{\sqrt{50}}$. (E) $\frac{11}{\sqrt{74}}$.

**Questão 11:** Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Para que $A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* ; \log_{\frac{1}{a}}\left[\log_a(x^2 - 15)\right] > 0\right\}$, o valor de $a$ é:

(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 9. (E) 10.

**Questão 12:** Se $(x_0, y_0)$ é uma solução real do sistema

$$\begin{cases} \log_2(x + 2y) - \log_3(x - 2y) = 2 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases},$$

então $x_0 + y_0$ é igual a:

(A) $\frac{7}{4}$. (B) $\frac{9}{4}$. (C) $\frac{11}{4}$. (D) $\frac{13}{4}$. (E) $\frac{17}{4}$.

**Questão 13:** Considere $A$ e $B$ matrizes reais $2 \times 2$, arbitrárias. Das afirmações abaixo assinale a verdadeira.

**Obs.:** No seu caderno de respostas, justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.

(A) Se $A$ é não nula então $A$ possui inversa.
(B) $(AB)^t = A^t B^t$.
(C) $\det(AB) = \det(BA)$.
(D) $\det A^2 = 2 \det A$.
(E) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

**Questão 14:** Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere as matrizes reais $2\times2$, $A = \begin{bmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{bmatrix}$. O produto $AB$ será inversível se e somente se:

(A) $a^2 - 5a + 6 \neq 0$. (B) $a^2 - 5a \neq 0$. (C) $a^2 - 3a \neq 0$.
(D) $a^2 - 2a + 1 \neq 0$. (E) $a^2 - 2a \neq 0$.

**Questão 15:** Seja $\alpha$ um número real tal que $\alpha > 2(1 + \sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes reais dessa equação são as cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:

(A) 30°. (B) 45°. (C) 60°. (D) 135°. (E) 120°.

**Questão 16:** Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = m$. Então, o valor de $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha + \cos^3\alpha}$ será:

(A) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(4-m^2)}$. (B) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(4+m^2)}$. (C) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$.
(D) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3+m^2)}$. (E) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(3-m^2)}$.

**Questão 17:** A aresta de um cubo mede $x$ cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo será:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}x$ cm. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{18}x$ cm. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$ cm. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ cm. (E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ cm.

**Questão 18:** As dimensões $x$, $y$ e $z$ de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm$^2$, então o volume deste paralelepípedo, em cm$^3$, é igual a:

(A) 1.200. (B) 936. (C) 1.155. (D) 728. (E) 834.

**Questão 19:** Três pessoas, $A$, $B$ e $C$, chegam no mesmo dia a uma cidade onde há cinco hoteis $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ e $H_5$. Sabendo que cada hotel tem pelo menos três vagas, qual/quais das seguintes afirmações, referentes à distribuição das três pessoas nos cinco hoteis, é/são correta(s)?

I. Existe um total de 120 combinações;

II. Existe um total de 60 combinações se cada pessoa pernoitar num hotel diferente;

III. Existe um total de 60 combinações se duas e apenas duas pessoas pernoitarem no mesmo hotel.

(A) Todas as afirmações são verdadeiras.
(B) Apenas a afirmação I é verdadeira.
(C) Apenas a afirmação II é verdadeira.
(D) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

**Questão 20:** O valor da potência $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

(A) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. (B) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. (C) $\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$. (D) $(\sqrt{2})^{93}i$. (E) $(\sqrt{2})^{93}+i$.

**Questão 21:** Sejam $a_1$, $a_2$, $a_3$ e $a_4$ quatro números reais (com $a_1 \neq 0$), formando nessa ordem uma progressão geométrica. Então, o sistema em $x$ e $y$: $\begin{cases} a_1x + a_3y = 1 \\ a_1a_2x + a_1a_4y = a_2 \end{cases}$ é um sistema:

(A) impossível.
(B) possível determinado.
(C) possível indeterminado.
(D) possível determinado apenas para $a_1 > 1$.
(E) possível determinado apenas para $a_1 < -1$.

**Questão 22:** Considere as funções reais $f$ e $g$ definidas por $f(x) = \frac{1+2x}{1-x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ e $g(x) = \frac{x}{1+2x}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. O maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde pode ser definida a composta $f \circ g$, tal que $(f \circ g)(x) < 0$, é:

(A) $\left]-1, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right[$.

(B) $]-\infty, -1[ \cup \left]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right[$.

(C) $]-\infty, -1[ \cup \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$.

(D) $]1, \infty[$.

(E) $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right[$.

**Questão 23:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3x+3, & x \leq 0 \\ x^2+4x+3, & x > 0 \end{cases}$.

Então:

(A) $f$ é bijetora e $(f \circ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(21)$.

(B) $f$ é bijetora e $(f \circ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(99)$.

(C) $f$ é sobrejetora mas não é injetora.

(D) $f$ é injetora mas não é sobrejetora.

(E) $f$ é bijetora e $(f \circ f)\left(-\frac{2}{3}\right) = f^{-1}(3)$.

**Questão 24:** Sabendo que o ponto $(2, 1)$ é ponto médio de uma corda $\overline{AB}$ da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$, então a equação da reta que contém $A$ e $B$ é dada por:

(A) $y = 2x - 3$. (B) $y = x - 1$. (C) $y = -x + 3$.

(D) $y = \frac{3}{2}x - 2$. (E) $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

**Questão 25:** São dadas as retas $r : x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ e $s : \sqrt{3}x + y - 2 + \sqrt{3} = 0$ e a circunferência $C : x^2 + 2x + y^2 = 0$. Sobre a posição relativa desses três elementos, podemos afirmar que:

(A) $r$ e $s$ são paralelas entre si e ambas são tangentes a $C$.

(B) $r$ e $s$ são perpendiculares entre si e nenhuma delas é tangente a $C$.

(C) $r$ e $s$ são concorrentes, $r$ é tangente a $C$ e $s$ não é tangente a $C$.

(D) $r$ e $s$ são concorrentes, $s$ é tangente a $C$ e $r$ não é tangente a $C$.

(E) $r$ e $s$ são concorrentes e ambas são tangentes a $C$.

## I.19 Vestibular 1995

**Questão 01:** Seja $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} + \operatorname{sen}\left(\frac{n!\,\pi}{6}\right) ; n \in \mathbb{N} \right\}$. Qual conjunto abaixo é tal que sua intersecção com $A$ dá o próprio $A$?

(A) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. (B) $(-\infty, -2]$. (C) $[-2, 2]$. (D) $[-2, 0]$. (E) $[0, 2)$.

**Questão 02:** Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{se } x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{x}\operatorname{sen} x & \text{se } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

onde $a > 0$ é uma constante. Considere $K = \{y \in \mathbb{R} : f(y) = 0\}$. Qual o valor de $a$, sabendo-se que $f(\pi/2) \in K$?

(A) $\pi/4$. (B) $\pi/2$. (C) $\pi$. (D) $\pi^2/2$. (E) $\pi^2$.

**Questão 03:** Uma vez que, para todo $x \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade $x^n > n(x-1)$, temos como consequência que, para $0 < x < 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se

(A) $x^{n-1} < [n(1+x)]^{-1}$.
(B) $x^{n-1} < [(n+1)(1+x)]^{-1}$.
(C) $x^{n-1} < [n^2(1-x)]^{-1}$.
(D) $x^{n-1} < [(n+1)(1-x)]^{-1}$.
(E) $x^{n-1} < [n(1-x)]^{-1}$.

**Questão 04:** Considere todos os números de cinco algarismos formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7 e 9 em qualquer ordem, sem repetição. A soma de todos esses números está entre

(A) $5 \times 10^6$ e $6 \times 10^6$. (B) $6 \times 10^6$ e $7 \times 10^6$. (C) $7 \times 10^6$ e $8 \times 10^6$.
(D) $9 \times 10^6$ e $10 \times 10^6$. (E) $10 \times 10^6$ e $11 \times 10^6$.

**Questão 05:** Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \ldots - \binom{4n}{4n-2} + 1$ é igual a

(A) $(-1)^n 2^{2n}$. (B) $2^{2n}$. (C) $(-1)^n 2^n$. (D) $(-1)^{n+1} 2^{2n}$. (E) $(-1)^{n+1} 2^n$.

**Questão 06:** Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por 0,3 : 0,03 : 0,003 : ... é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale

(A) 1/3. (B) 2/3. (C) 1. (D) 2. (E) 1/2.

**Questão 07:** Os dados experimentais da tabela abaixo correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundos é

| Tempo s | Concentração moles |
|---|---|
| 1 | 3,00 |
| 2 | 5,00 |
| 3 | 1,00 |

(A) 3,60. (B) 3,65. (C) 3,70. (D) 3,75. (E) 3,80.

**Questão 08:** A divisão de um polinômio $P(x)$ por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$ é igual a

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

**Questão 09:** Sabendo-se que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é

(A) 17. (B) 19. (C) 21. (D) 23. (E) 25.

**Questão 10:** Seja $z$ um número complexo satisfazendo $\mathrm{Re}(z) > 0$ e $(z + i)^2 + |\bar{z} + i|^2 = 6$. Se $n$ é o menor natural para o qual $z^n$ é um imaginário puro, então $n$ é igual a

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

**Questão 11:** Sejam $z_1$ e $z_2$ números complexos com $|z_1| = |z_2| = 4$. Se 1 é uma raiz da equação $z_1 z^6 + z_2 z^3 - 8 = 0$ então a soma das raízes reais é igual a

(A) $-1$. (B) $-1 + 2^{1/2}$. (C) $1 - 2^{1/3}$. (D) $1 + 3^{1/2}$. (E) $-1 + 3^{1/2}$.

**Questão 12:** Se $S$ é o conjunto dos valores de $a$ para os quais o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + (\log_3 a)^2 y + z &= 0 \\ 2x + 2y + \left(\log_3 \frac{27}{a}\right) z &= 0 \end{aligned}$$

é indeterminado, então

(A) $S \subset [-3, 3]$. (B) $S$ é vazio. (C) $S \subset [2, 4]$. (D) $S \subset [1, 3]$. (E) $S \subset [0, 1]$.

**Questão 13:** Se $x$ é um número real positivo, com $x \neq 1$ e $x \neq \frac{1}{3}$, satisfazendo

$$\frac{2 + \log_3 x}{\log_{x+2} x} - \frac{\log_x(x+2)}{1 + \log_3 x} = \log_x(x+2)$$

então $x$ pertence ao intervalo $I$, onde

(A) $I = \left(0, \frac{1}{9}\right)$. (B) $I = \left(0, \frac{1}{3}\right)$. (C) $I = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. (D) $I = \left(1, \frac{3}{2}\right)$. (E) $I = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

**Questão 14:** Dizemos que duas matrizes $n \times n$ $A$ e $B$ são semelhantes se existe uma matriz $n \times n$ inversível $P$ tal que $B = P^{-1}AP$. Se $A$ e $B$ são matrizes semelhantes quaisquer, então

(A) $B$ é sempre inversível.
(B) se $A$ é simétrica, então $B$ também é simétrica.
(C) $B^2$ é semelhante a $A$.
(D) se $C$ é semelhante a $A$, então $BC$ é semelhante a $A^2$.
(E) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$, onde $\lambda$ é um real qualquer.

**Questão 15:** Sejam $A$ e $B$ matrizes reais $3 \times 3$. Se $\mathrm{tr}(A)$ denota a soma dos elementos da diagonal principal de $A$, considere as afirmações:

I. $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$;

II. Se $A$ é inversível, então $\mathrm{tr}(A) \neq 0$;

III. $\mathrm{tr}(A + \lambda B) = \mathrm{tr}(A) + \lambda\,\mathrm{tr}(B)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Temos que

(A) todas as afirmações são verdadeiras.
(B) todas as afirmações são falsas.
(C) apenas a afirmação I é verdadeira.
(D) apenas a afirmação II é falsa.
(E) apenas a afirmação III é falsa.

**Questão 16:** Três pontos de coordenadas, respectivamente, $(0,0)$, $(b, 2b)$ e $(5b, 0)$, com $b > 0$, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por

(A) $(-b, -b)$. (B) $(2b, -b)$. (C) $(4b, -2b)$. (D) $(3b, -2b)$. (E) $(2b, -2b)$.

**Questão 17:** Uma reta $t$ do plano cartesiano $xOy$ tem coeficiente angular $2a$ e tangencia a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas $(a, b)$. Se $(c, 0)$ e $(0, d)$ são as coordenadas de dois pontos de $t$ tais que $c > 0$ e $c = -2d$, então $a/b$ é igual a

(A) $-4/15$. (B) $-5/16$. (C) $-3/16$. (D) $-6/15$. (E) $-7/15$.

**Questão 18:** Considere $C$ uma circunferência centrada em $O$ e raio $2r$ e $t$ a reta tangente a $C$ num ponto $T$. Considere também $A$ um ponto de $C$ tal que $A\hat{O}T = \theta$ é um ângulo agudo. Sendo $B$ o ponto de $t$ tal que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{OT}$, então a área do trapézio $OABT$ é igual a

(A) $r^2(2\cos\theta - \cos 2\theta)$. (B) $2r^2(4\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta)$. (C) $r^2(4\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta)$.
(D) $r^2(2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$. (E) $2r^2(2\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta)$.

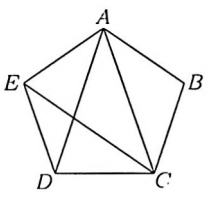
**Questão 19:** A expressão $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$, $0 < \theta < \pi$, é idêntica a

(A) $\sec\dfrac{\theta}{2}$. (B) $\operatorname{cossec}\dfrac{\theta}{2}$. (C) $\operatorname{cotg}\dfrac{\theta}{2}$. (D) $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$. (E) $\cos\dfrac{\theta}{2}$.

**Questão 20:** Um dispositivo colocado no solo a uma distância $d$ de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in (0, \pi/4)$, atinge a torre a uma altura $h$. Se o segundo, disparado sob um ângulo $2\theta$, atinge-a a uma altura $H$, a relação entre as duas alturas será

(A) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$. (B) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$. (C) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$.
(D) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$. (E) $H = hd^2/(d^2 + h)$.

**Questão 21:** O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:




(A) $x^2 + x - 2 = 0$. (B) $x^2 - x - 2 = 0$. (C) $x^2 - 2x + 1 = 0$.
(D) $x^2 + x - 1 = 0$. (E) $x^2 - x - 1 = 0$.

**Questão 22:** Um cone reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita neste cone mede, em cm:

(A) $10/3$. (B) $7/4$. (C) $12/5$. (D) $3$. (E) $2$.

**Questão 23:** O raio de um cilindro de revolução mede 1,5 m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em $m^2$, vale

(A) $\frac{3\pi^2}{4}$. (B) $\frac{9\pi(2+\pi)}{4}$. (C) $\pi(2+\pi)$. (D) $\frac{\pi^2}{2}$. (E) $\frac{3\pi(\pi+1)}{2}$.

**Questão 24:** Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em $cm^4$, é

(A) $27\sqrt{3}$. (B) $13\sqrt{2}$. (C) 12. (D) $54\sqrt{3}$. (E) $17\sqrt{5}$.

**Questão 25:** Dada uma pirâmide regular triangular, sabe-se que sua altura mede $3a$ cm, onde $a$ é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em $cm^2$, vale

(A) $\frac{a^2\sqrt{327}}{4}$. (B) $\frac{a^2\sqrt{109}}{2}$. (C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

(D) $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{33})}{2}$. (E) $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{4}$.

# I.20 Vestibular 1994

**Questão 01:** Sejam $x$ e $y$ números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo $(x+iy)^2 = (x+y)i$. Então:

(A) $x$ e $y$ são números irracionais.
(B) $x > 0$ e $y < 0$.
(C) $x$ é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$.
(D) $x < 0$ e $y = x$.
(E) $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$.

**Questão 02:** Considere as afirmações:

I. $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{10} = \cos(10\theta) + i\,\mathrm{sen}(10\theta)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$;
II. $\frac{(5i)}{(2+i)} = 1 + 2i$;
III. $(1-i)^4 = -4$;
IV. Se $z^2 = (\overline{z})^2$, então $z$ é real ou imaginário puro;
V. O polinômio $x^4 + x^3 - x - 1$ possui apenas raízes reais.

Podemos concluir que:

(A) todas são verdadeiras.
(B) apenas quatro são verdadeiras.
(C) apenas três são verdadeiras.
(D) apenas duas são verdadeiras.
(E) apenas uma é verdadeira.

**Questão 03:** Dadas as funções reais de variável real $f(x) = mx + 1$ e $g(x) = x + m$, onde $m$ é uma constante real com $0 < m < 1$, considere as afirmações:

I. $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$;
II. $f(m) = g(m)$;
III. Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(f \circ g)(a) = f(a)$;
IV. Existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(b) = mb$;
V. $0 < (g \circ g)(m) < 3$.

Podemos concluir que:

(A) todas são verdadeiras.
(B) apenas quatro são verdadeiras.
(C) apenas três são verdadeiras.
(D) apenas duas são verdadeiras.
(E) apenas uma é verdadeira.

**Questão 04:** A identidade $\frac{x^3+1}{x^3-1} = 1 + \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ é válida para todo número real $x \neq -1$. Então $a+b+c$ é igual a:
(A) 5. (B) 4. (C) 3. (D) 2. (E) 1.

**Questão 05:** As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:
(A) 190. (B) 191. (C) 192. (D) 193. (E) 194.

**Questão 06:** Seja $P(x)$ um polinômio de grau 5, com coeficientes reais, admitindo 2 e $i$ como raízes. Se $P(1)P(-1) < 0$, então o número de raízes reais de $P(x)$ pertencentes ao intervalo $]-1,1[$ é:
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) 4.

**Questão 07:** Quantos anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?
(A) 7 200. (B) 7 000. (C) 4 800. (D) 3 600. (E) 2 400.

**Questão 08:** No desenvolvimento de $A = \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2m}{3}\right)^{10}$, a razão entre a parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ e a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$ é igual a $\frac{9}{16}$. Se $a$ e $m$ são números reais positivos tais que $A = (m^2+4)^5$, então:
(A) $a.m = \frac{2}{3}$. (B) $a.m = \frac{1}{3}$. (C) $a + m = \frac{5}{2}$. (D) $a + m = 5$. (E) $a - m = \frac{5}{2}$.

**Questão 09:** Seja $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão $q > 0$. O produto de seus termos é igual a $2^{25}$ e o termo do meio é $2^5$. Se a soma dos $(n-1)$ primeiros termos é igual a $2(1+q)(1+q^2)$, então:
(A) $a_1 + q = 16$. (B) $a_1 + q = 12$. (C) $a_1 + q = 10$.
(D) $a_1 + q + n = 20$. (E) $a_1 + q + n = 11$.

**Questão 10:** Sejam $A$ e $I$ matrizes reais quadradas de ordem 2, sendo $I$ a matriz identidade. Por $T$ denotamos o traço de $A$, ou seja, $T$ é a soma dos elementos da diagonal principal de $A$. Se $T \neq 0$ e $\lambda_1$, $\lambda_2$ são as raízes da equação $\det(A - \lambda I) = \det(A) - \det(\lambda I)$, então:

(A) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ independem de $T$. (B) $\lambda_1 . \lambda_2 = T$. (C) $\lambda_1 . \lambda_2 = 1$.

(D) $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{T}{2}$. (E) $\lambda_1 + \lambda_2 = T$.

**Questão 11:** Sejam $A$ e $P$ matrizes reais quadradas de ordem $n$ tais que $A$ é simétrica (isto é, $A = A^t$) e $P$ é ortogonal (isto é, $PP^t = I = P^tP$), $P$ diferente da matriz identidade. Se $B = P^tAP$, então:

(A) $AB$ é simétrica. (B) $BA$ é simétrica. (C) $\det A = \det B$.

(D) $BA = AB$. (E) $B$ é ortogonal.

**Questão 12:** Seja $A$ uma matriz real quadrada de ordem $n$ e $B = I - A$, onde $I$ denota a matriz identidade de ordem $n$. Supondo que $A$ é inversível e idempotente (isto é, $A^2 = A$), considere as afirmações:

I. $B$ é idempotente;
II. $AB = BA$;
III. $B$ é inversível;
IV. $A^2 + B^2 = I$;
V. $AB$ é simétrica.

Com respeito a estas afirmações, temos que:

(A) todas são verdadeiras.
(B) apenas uma é verdadeira.
(C) apenas duas são verdadeiras.
(D) apenas três são verdadeiras.
(E) apenas quatro são verdadeiras.

**Questão 13:** Sejam $x$ e $y$ números reais, positivos e ambos diferentes de 1, satisfazendo o sistema: $x^y = \frac{1}{y^2}$ e $\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Então o conjunto $\{x, y\}$ está contido no intervalo:

(A) $[2, 5]$. (B) $]0, 4[$. (C) $[-1, 2]$. (D) $[4, 8[$. (E) $[5, \infty[$.

**Questão 14:** A expressão trigonométrica $\frac{1}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2} - \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}$ para $x \in ]0, \pi/2[$, $x \neq \frac{\pi}{4}$, é igual a:

(A) $\operatorname{sen}(2x)$. (B) $\cos(2x)$. (C) 1. (D) 0. (E) $\sec(x)$.

**Questão 15:** Sejam $a$, $b$ e $c$ as medidas dos lados de um triângulo, e $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ os ângulos internos opostos, respectivamente, a cada um destes lados. Sabe-se que $a, b, c$, nesta ordem, formam uma progressão aritmética. Se o perímetro do triângulo mede 15 cm e $\frac{\cos\hat{A}}{a} + \frac{\cos\hat{B}}{b} + \frac{\cos\hat{C}}{c} = \frac{77}{240}$, então sua área, em cm$^2$, mede:

(A) $\frac{(15\sqrt{7})}{4}$. (B) $\frac{(4\sqrt{5})}{3}$. (C) $\frac{(4\sqrt{5})}{5}$. (D) $\frac{(4\sqrt{7})}{7}$. (E) $\frac{(3\sqrt{5})}{4}$.

**Questão 16:** Seja $(a, b, c, d, e)$ uma progressão geométrica de razão $a$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Se a soma de seus termos é igual a $13a + 12$ e $x$ é um número real positivo diferente de 1, tal que: $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_d x} + \frac{1}{\log_e x} = \frac{5}{2}$, então $x$ é igual a:

(A) $3^3$. (B) $2^3$. (C) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. (D) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. (E) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$.

**Questão 17:** O sistema a seguir, nas incógnitas $x$, $y$ e $z$,

$$\begin{aligned} 3^a x - 9^a y + 3z &= 2^a \\ 3^{a+1} x - 5y + 9z &= 2^{a+1} \\ x + 3^{a-1} y + 3^{a+1} z &= 1 \end{aligned}$$

é possível e determinado quando o número $a$ é diferente de:

(A) $\log_3 2$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 5)$.

(B) $\log_2 3$ e $\frac{1}{2}\log_2 5$.

(C) $\log_2 1$ e $\frac{1}{2}\log_2 3$.

(D) $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 1)$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 3)$.

(E) $\log_3 1$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_3 5)$.

**Questão 18:** Numa circunferência inscreve-se um quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $A\hat{B}C = 70°$. Se $x = A\hat{C}B + B\hat{D}C$, então:

(A) $x = 120°$. (B) $x = 110°$. (C) $x = 100°$. (D) $x = 90°$. (E) $x = 80°$.

**Questão 19:** Um triângulo $ABC$, retângulo em $A$, possui área $S$. Se $x = \hat{ABC}$ e $r$ é o raio da circunferência circunscrita a este triângulo, então:

(A) $S = r^2 \cos(2x)$. (B) $S = r^2 \operatorname{sen}(2x)$. (C) $S = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}(2x)$.

(D) $S = \frac{1}{2} r^2 \cos^2 x$. (E) $S = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}^2 x$.

**Questão 20:** Duas retas $r$ e $s$ são dadas, respectivamente, pelas equações $3x - 4y = 3$ e $2x + y = 2$. Um ponto $P$ pertencente à reta $s$ tem abscissa positiva e dista 22 unidades de medida da reta $r$. Se $ax + by + c = 0$ é a equação da reta que contém $P$ e é paralela a $r$, então $a + b + c$ é igual a:

(A) $-132$. (B) $-126$. (C) $-118$. (D) $-114$. (E) $-112$.

**Questão 21:** Um triângulo equilátero $ABC$ é tal que $A : (0, 3)$, $B : (3\sqrt{3}, 0)$ e a abscissa do ponto $C$ é maior que 2. A circunferência circunscrita a este triângulo tem raio $r$ e centro em $O : (a, b)$. Então $a^2 + b^2 + r^2$ é igual a:

(A) 31. (B) 32. (C) 33. (D) 34. (E) 35.

**Questão 22:** Um prisma hexagonal regular tem como altura o dobro da aresta da base. A razão entre o volume deste prisma e o volume do cone reto, nele inscrito, é igual a:

(A) $\frac{(6\sqrt{2})}{\pi}$. (B) $\frac{(9\sqrt{2})}{\pi}$. (C) $\frac{(3\sqrt{6})}{\pi}$. (D) $\frac{(6\sqrt{3})}{\pi}$. (E) $\frac{(9\sqrt{3})}{\pi}$.

**Questão 23:** Um tetraedro regular tem área total igual a $6\sqrt{3}$ cm$^2$. Então sua altura, em cm, é igual a:

(A) 2. (B) 3. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $3\sqrt{2}$. (E) $2\sqrt{3}$.

**Questão 24:** Num cilindro circular reto, sabe-se que altura $h$ e o raio da base $r$ são tais que os números $\pi, h, r$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de soma $6\pi$. O valor da área total deste cilindro é:

(A) $\pi^3$. (B) $2\pi^3$. (C) $15\pi^3$. (D) $20\pi^3$. (E) $30\pi^3$.

**Questão 25:** Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros, cujos lados medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm. Se a aresta lateral do tronco mede 3 cm, então o valor de sua altura $h$, em cm, é tal que:

(A) $\sqrt{7} < h < \sqrt{8}$. (B) $\sqrt{6} < h < \sqrt{7}$. (C) $2\sqrt{3} < h < 3\sqrt{3}$.

(D) $1 < h < \sqrt{2}$. (E) $2\sqrt{2} < h < 3\sqrt{2}$.

## I.21 Vestibular 1993

**Questão 01:** Seja $a$ o módulo do número complexo $(2 - 2\sqrt{3}i)^{10}$. Então o valor de $x$ que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:

(A) $10/11$. (B) $-2$. (C) $5/8$. (D) $3/8$. (E) $1/5$.

**Questão 02:** Resolvendo a equação $z^2 = \overline{2 + z}$ no conjunto dos números complexos, conclui-se sobre as suas soluções que:

(A) nenhuma delas é um número inteiro.
(B) a soma delas é 2.
(C) estas são em número de 2 e são distintas.
(D) estas são em número de 4 e são 2 a 2 distintas.
(E) uma delas é da forma $z = bi$ com $b$ real não nulo.

**Obs.:** Por $\overline{a}$ denotamos o conjugado do número complexo $a$.

**Questão 03:** O conjunto solução da inequação $\log_\pi[(1 - x)x] < \log_\pi[(1 + x)x^2]$ é dado por:

(A) $1 < x < \dfrac{3}{2}$. (B) $0 < x < 1$. (C) $0 < x < \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

(D) $0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (E) $0 < x < \sqrt{2} - 1$.

**Questão 04:** A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um $\alpha$ e o outro $2\alpha$. A razão entre os lados menor e o maior do paralelogramo é:

(A) $1/\cos 2\alpha$. (B) $1/\operatorname{sen} 2\alpha$. (C) $1/(2\operatorname{sen}\alpha)$. (D) $1/(2\cos\alpha)$. (E) $\operatorname{tg}\alpha$.

**Questão 05:** O conjunto das soluções da equação $\operatorname{sen} 5x = \cos 3x$ contém o seguinte conjunto:

(A) $\left\{\dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (B) $\left\{\dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (C) $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(D) $\left\{\dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. (E) $\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**Questão 06:** Num triângulo $ABC$ retângulo em $A$, seja $D$ a projeção de $A$ sobre $\overline{BC}$. Sabendo-se que o segmento $\overline{BD}$ mede $\ell$ cm e que o ângulo $D\hat{A}C$ mede $\theta$ graus então a área do triângulo $ABC$ vale:

(A) $\dfrac{\ell^2}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta$. (B) $\dfrac{\ell^2}{2}\sec^2\theta\operatorname{tg}\theta$. (C) $\dfrac{\ell^2}{2}\sec\theta\operatorname{tg}^2\theta$.

(D) $\dfrac{\ell^2}{2}\operatorname{cossec}\theta\operatorname{cotg}\theta$. (E) $\dfrac{\ell^2}{2}\operatorname{cossec}^2\theta\operatorname{cotg}\theta$.

**Questão 07:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não nula, ímpar e periódica de período $p$. Considere as seguintes afirmações:

I. $f(p) \neq 0$;

II. $f(-x) = -f(x+p). \forall x \in \mathbb{R}$;

III. $f(-x) = f(x-p). \forall x \in \mathbb{R}$;

IV. $f(x) = -f(-x). \forall x \in \mathbb{R}$.

Podemos concluir que:

(A) I e II são falsas.
(B) I e III são falsas.
(C) II e III são falsas.
(D) I e IV são falsas.
(E) II e IV são falsas.

**Questão 08:** Analisando o sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$ concluímos que este é:

(A) possível e determinado com $xyz = 7$.
(B) possível e determinado com $xyz = -8$.
(C) possível e determinado com $xyz = 6$.
(D) possível e indeterminado.
(E) impossível.

**Questão 09:** Dadas as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 2 & x & 0 \\ y & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & y \\ 0 & 8 & 2 \\ x & 3 & x-2 \end{bmatrix}$ analise as afirmações:

I. $A = B \Leftrightarrow x = 3$ e $y = 0$;

II. $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 16 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 2$ e $y = 1$;

III. $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 1$,

e conclua

(A) Apenas a afirmação II é verdadeira.
(B) Apenas a afirmação I é verdadeira.
(C) As afirmações I e II são verdadeiras.
(D) Todas as afirmações são falsas.
(E) Apenas a afirmação I é falsa.

**Questão 10:** Seja $A$ a matriz $3 \times 3$ dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo-se que $B$ é a inversa de $A$, então a soma dos elementos de $B$ vale:
(A) 1. (B) 2. (C) 5. (D) 0. (E) $-2$.

**Questão 11:** Sabendo-se que a soma das raízes da equação $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & b & x & x \\ b & x & 2 & b \end{vmatrix} =$ 0 é $-8/3$ e que $S$ é o conjunto destas raízes, podemos afirmar que:
(A) $S \subset [-17, -1]$. (B) $S \subset [1, 5]$. (C) $S \subset [-1, 3]$. (D) $S \subset [-10, 0]$. (E) $S \subset [0, 3]$.

**Questão 12:** Um acidente de carro foi presenciado por 1/65 da população de Votuporanga (SP). O número de pessoas que soube do acontecimento $t$ horas após é dado por: $f(t) = \frac{B}{1 + Ce^{-kt}}$ onde $B$ é a população da cidade. Sabendo-se que 1/9 da população soube do acidente 3 horas após então o tempo que passou até que 1/5 da população soubesse da notícia foi de:
(A) 4 horas. (B) 5 horas. (C) 6 horas.
(D) 5 horas e 24 min. (E) 5 horas e 30 min.

**Questão 13:** Numa progressão aritmética de $2n + 1$ termos, a soma dos $n$ primeiros é igual a 50 e a soma dos $n$ últimos é 140. Sabendo-se que a razão desta progressão é um inteiro entre 2 e 13, então seu último termo será igual a:
(A) 34. (B) 40. (C) 42. (D) 48. (E) 56.

**Questão 14:** A soma dos 5 primeiros termos de uma progressão aritmética de razão $r$ é 50 e a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão $q$ é 12. Se ambas as progressões tiverem o mesmo termo inicial menor do que 10 e sabendo-se que $q = r^2$, podemos afirmar que a soma dos 4 primeiros termos da progressão geométrica será:
(A) 623/11. (B) 129/32. (C) 35/2. (D) 765/64. (E) 13.

**Questão 15:** Possuo 3 vasos idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos vasos tenha 7 rosas e os outros dois no mínimo 5. Cada um deverá ter 2 rosas vermelhas e 1 amarela, pelo menos. Quantos arranjos distintos poderei fazer usando as 18 rosas?
(A) 10. (B) 11. (C) 12. (D) 13. (E) 14.

**Questão 16:** Analise as afirmações classificando-as em verdadeiras ou falsas:

I. O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que cada pessoa premiada receba no máximo um prêmio é 21;

II. O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que 4 e apenas 4 sejam premiadas é 140;

III. Para todo natural $n$, $n \geq 5$, $\binom{n}{5} = \binom{n}{n-5}$.

Você concluiu que

(A) Apenas I é verdadeira.
(B) Apenas II e III são verdadeiras.
(C) Apenas III é verdadeira.
(D) Todas são verdadeiras.
(E) Todas são falsas.

**Questão 17:** Sabendo-se que a equação, de coeficientes reais, $x^6 - (a + b + c)x^5 + 6x^4 + (a - 2b)x^3 - 3cx^2 + 6x - 1 = 0$ é uma equação recíproca de segunda classe, então o número de raízes reais desta equação é:

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 6.

**Questão 18:** Considere a equação de coeficientes reais $x^5 + mx^4 + 2\frac{p}{m}x^3 - 316x^2 + 688x + p = 0$, $m \neq 0$, para a qual $1 + 3i$ é raiz. Sabendo-se que a equação admite mais de uma raiz real e que suas raízes reais formam uma progressão geométrica de razão inteira $q$ cujo produto é igual a 64, podemos afirmar que $\frac{p}{m}$ é igual a:

(A) 20. (B) 30. (C) 40. (D) 120. (E) 160.

**Questão 19:** Calculando-se a área da região limitada por $y \leq \frac{3}{2}(x + 2)$ e $x^2 + (y - 3)^2 \leq 13$ obtém-se:

(A) $2\sqrt{13}\pi$. (B) $13\pi$. (C) $(13\pi)/2$. (D) $(3\sqrt{13\pi})/2$. (E) $\sqrt{13}\pi$.

**Questão 20:** Dadas as retas $r_1 : x + 2y - 5 = 0$, $r_2 : x - y - 2 = 0$ e $r_3 : x - 2y - 1 = 0$ podemos afirmar que:

(A) são 2 a 2 paralelas.
(B) $r_1$ e $r_3$ são paralelas.
(C) $r_1$ é perpendicular a $r_3$.
(D) $r_2$ é perpendicular a $r_3$.
(E) as três retas são concorrentes num mesmo ponto.

**Questão 21:** Sendo $r$ uma reta dada pela equação $x - 2y + 2 = 0$, então, a equação da reta $s$ simétrica à reta $r$ em relação ao eixo das abscissas é descrita por:

(A) $x + 2y = 0$. (B) $3x - y + 3 = 0$. (C) $2x + 3y + 1 = 0$.
(D) $x + 2y + 2 = 0$. (E) $x - 2y - 2 = 0$.

**Questão 22:** Uma das circunferências que passa pelo ponto $P : (0, 0)$ e tangencia as retas $r_1 : x - y = 0$ e $r_2 : x + y - 2 = 0$ tem sua equação dada por:

(A) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}$.
(B) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$.
(C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.
(D) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$.
(E) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$.

**Questão 23:** A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 m e de área da base 64 m$^2$ vale:

(A) 128 m$^2$. (B) $64\sqrt{2}$ m$^2$. (C) 135 m$^2$. (D) $60\sqrt{5}$ m$^2$. (E) $32(\sqrt{2} + 1)$ m$^2$.

**Questão 24:** São dados dois cubos $I$ e $II$ de áreas totais $S_1$ e $S_2$ e de diagonais $d_1$ e $d_2$, respectivamente. Sabendo-se que $S_1 - S_2 = 54$ m$^2$ e que $d_2 = 3$ m, então o valor da razão $\dfrac{d_1}{d_2}$ é:

(A) 3/2. (B) 5/2. (C) 2. (D) 7/3. (E) 3.

**Questão 25:** Sabendo-se que um cone circular reto tem 3 dm de raio e $15\pi$ dm$^2$ de área lateral, o valor de seu volume em dm$^3$ é:

(A) $9\pi$. (B) $15\pi$. (C) $36\pi$. (D) $20\pi$. (E) $12\pi$.

# I.22 Vestibular 1992

**Questão 01:** Considere as funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3^{x+\frac{1}{2}}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{81}{x}$. O conjunto dos valores de $x$ em $\mathbb{R}^*$ tais que $(f \circ g)(x) = (h \circ f)(x)$ é subconjunto de:
(A) $[0, 3]$. (B) $[3, 7]$. (C) $[-6, 1]$. (D) $[-2, 2]$. (E) n.d.a.

**Questão 02:** O domínio da função $f(x) = \log_{2x^2-3x+1}(3x^2 - 5x + 2)$ é:
(A) $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.
(B) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.
(C) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, -\infty\right)$.
(D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
(E) n.d.a.

**Questão 03:** Dadas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas estritamente decrescentes e sobrejetoras, considere $h = f \circ g$. Então podemos afirmar que:
(A) $h$ é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
(B) $h$ é estritamente decrescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
(C) $h$ é estritamente crescente, mas não é necessariamente inversível.
(D) $h$ é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente decrescente.
(E) n.d.a.

**Questão 04:** Considere o número complexo $z = a + 2i$ cujo argumento está no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Sendo $S$ o conjunto dos valores de $a$ para os quais $z^6$ é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de $S$ vale:
(A) 4. (B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$. (C) 8. (D) $\frac{8}{\sqrt{3}}$. (E) n.d.a.

**Questão 05:** Sabe-se que $2\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{20}\right)$ é uma raiz quíntupla de $w$. Seja $S$ o conjunto de todas as raízes de $z^4-2z^2+\frac{w-16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}}=0$. Um subconjunto de $S$ é:

(A) $\left\{2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right),2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)\right\}$.

(B) $\left\{2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{8}\right),2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{8}\right)\right\}$.

(C) $\left\{2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right),2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\right\}$.

(D) $\left\{2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{8}\right),2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)\right\}$.

(E) n.d.a.

**Questão 06:** Considere a equação: $\det\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ G(x) & 2x & F(x)\\ (G(x))^2 & 4x^2 & (F(x))^2\end{bmatrix}=0$ onde $F(x)=\frac{x^4+x^3-x+1}{x^2}$ e $G(x)=\frac{x^2-1}{x}$, com $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$. Sobre as raízes reais dessa equação, temos:

(A) Duas delas são negativas.
(B) Uma delas é um número irracional.
(C) Uma delas é um número par.
(D) Uma delas é positiva e outra negativa.
(E) n.d.a.

**Questão 07:** Sejam $a$ e $b$ constantes reais. Sobre a equação $x^4-(a+b)x^3+(ab+2)x^2-(a+b)x+1=0$ podemos afirmar que:

(A) Não possui raiz real se $a<b<-3$.
(B) Não possui raiz real se $a>b>3$.
(C) Todas as raízes são reais se $|a|\geq 2$ e $|b|\geq 2$.
(D) Possui pelo menos uma raiz real se $-1<a\leq b<1$.
(E) n.d.a.

**Questão 08:** Numa progressão geométrica de razão inteira $q>1$, sabe-se que $a_1a_n=243$, $\log_q a_n=6$ e $\log_q P_n=20$, onde $a_n$ é o $n$-ésimo termo da progressão geométrica e $P_n$ é o produto dos $n$ primeiros termos. Então a soma dos $n$ primeiros termos é igual a:

(A) $\frac{3^9-1}{6}$. (B) $\frac{3^{10}-1}{6}$. (C) $\frac{3^8-1}{6}$. (D) $\frac{3^9-1}{3}$. (E) n.d.a.

**Questão 09:** Sejam $a, b, c, d$ números reais não nulos que estão, nesta ordem, em progressão aritmética. Sabendo que o sistema abaixo

$$\begin{cases} 4.2^a.x + 2^c.y = \frac{2}{3}.2^b \\ 3^d.x + 9.3^b.y = 81 \end{cases}$$

é possível e indeterminado, podemos afirmar que a soma desta progressão aritmética é:

(A) 13. (B) 16. (C) 28. (D) 30. (E) n.d.a.

**Questão 10:** Seja $A \in \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ tal que $\det A = 0$. Considere as afirmações:

I. Existe $X \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$ não nula tal que $AX$ é identicamente nula;

II. Para todo $Y \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$, existe $X \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$ tal que $AX = Y$;

III. Sabendo que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ então a primeira linha da transposta de $A$ é $[5\ 1\ 2]$.

Temos que:

(A) Todas são falsas.
(B) Apenas II é falsa.
(C) Todas são verdadeiras.
(D) Apenas I e II são verdadeiras.
(E) n.d.a.

**Questão 11:** Seja $C = \{X \in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R}): X^2 + 2X = 0\}$. Dadas as afirmações:

I. Para todo $X \in C$, $(X + 2I)$ é inversível;

II. Se $X \in C$ e $\det(X + 2I) \neq 0$ então $X$ não é inversível;

III. Se $X \in C$ e $\det X \neq 0$ então $\det X > 0$,

podemos dizer que:

(A) Todas são verdadeiras.
(B) Todas são falsas.
(C) Apenas II e III são verdadeiras.
(D) Apenas I é verdadeira.
(E) n.d.a.

**Questão 12:** A igualdade $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}7^n + \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}2^m = 64$ é válida para:

(A) Quaisquer que sejam $n$ e $m$ naturais positivos.
(B) Qualquer que seja $n$ natural positivo e $m = 3$.
(C) $n = 13$ e $m = 6$.
(D) $n$ ímpar e $m$ par.
(E) n.d.a.

**Questão 13:** No desenvolvimento de $(x + y)^6$, ordenado segundo as potências decrescentes de $x$, a soma do $2^o$ termo com $\frac{1}{10}$ do termo de maior coeficiente é igual a oito vezes a soma de todos os coeficientes. Se $x = (2)^{z+1}$ e $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{z-\frac{1}{2}}$, então:

(A) $z \in [0, 1]$. (B) $z \in (20, 50)$. (C) $z \in (-\infty, 0]$. (D) $z \in [1, 15]$. (E) n.d.a.

**Questão 14:** Seja $\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\log 2}{\log 2 - \log 3}$. O conjunto solução da desigualdade $2^{\operatorname{sen} x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é:

(A) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right)$. (B) $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$. (C) $\left[0, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$.
(D) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$. (E) n.d.a.

**Questão 15:** Sabendo que $x$ e $y$ são ângulos do primeiro quadrante tais que $\cos x = \frac{5}{6}$ e $\cos y = \frac{4}{5}$, então se $\alpha = x - y$ e $T = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} + \operatorname{sen}^2\alpha$, temos

(A) $\alpha$ está no $4^o$ quadrante e $T = \frac{2}{3}$.
(B) $\alpha$ está no $1^o$ quadrante e $T = \frac{2}{3}$.
(C) $\alpha$ está no $1^o$ quadrante e $T = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{11}}{10}$.
(D) $\alpha$ está no $4^o$ quadrante e $T = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{11}}{10}$.
(E) n.d.a.

**Questão 16:** Num triângulo $ABC$, retângulo em $\hat{A}$, temos $\hat{B} = 60°$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto $D$. Se o segmento de reta $\overline{BD}$ mede 1 cm, então a hipotenusa mede:

(A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm. (B) $1+\sqrt{3}$ cm. (C) $2+\sqrt{3}$ cm. (D) $1+2\sqrt{2}$ cm. (E) n.d.a.

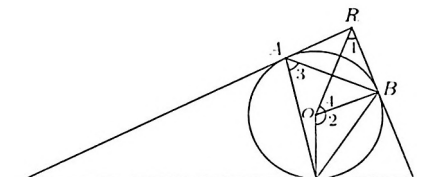
**Questão 17:** A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta $y = mx$, $m > 0$, forma com o eixo dos $x$ é

(A) $y = \frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$. (B) $y = \frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}x$. (C) $y = \frac{-1-\sqrt{1-m^2}}{m}x$.
(D) $y = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$. (E) n.d.a.

**Questão 18:** A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cujo apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência é:

(A) $\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{3}{8}$. (E) n.d.a.

**Questão 19:** Considere o triângulo $PQR$ abaixo, circunscrito a uma circunferência de centro $O$, cujos pontos de tangência são $A$, $B$ e $C$. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20°. Os ângulos 1, 2, 3, 4 conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:




(A) 40°, 120°, 60°, 50°. (B) 40°, 100°, 50°, 40°. (C) 60°, 140°, 60°, 40°.
(D) 60°, 120°, 40°, 50°. (E) n.d.a.

**Questão 20:** Num cone de revolução, o perímetro da seção meridiana mede 18 cm e o ângulo do setor circular mede 288°. Considerando-se o tronco de cone cuja razão entre as áreas das bases é 4/9, então sua área total mede:

(A) $16\pi$ cm². (B) $\frac{308\pi}{9}$ cm². (C) $\frac{160\pi}{3}$ cm². (D) $\frac{100\pi}{9}$ cm². (E) n.d.a.

**Questão 21:** Uma seção plana que contém o eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases menor e maior medem, respectivamente, $h$ cm e $H$ cm. Duplicando-se a base menor, o volume sofre um acréscimo de $\frac{1}{3}$ em relação ao seu volume original. Deste modo,

(A) $2H = 3h$. (B) $H = 2h$. (C) $H = 3h$. (D) $2H = 5h$. (E) n.d.a.

**Questão 22:** Um cone de revolução está circunscrito a uma esfera de raio $R$ cm. Se a altura do cone for igual ao dobro do raio da base, então a áre de sua superfície lateral mede:

(A) $\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{5})^2R^2$ cm$^2$.

(B) $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}(1+\sqrt{5})^2R^2$ cm$^2$.

(C) $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}(1+\sqrt{5})R^2$ cm$^2$.

(D) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})R^2$ cm$^2$.

(E) n.d.a.

**Questão 23:** Seja $C$ a circunferência $x^2+y^2-2x-6y+5=0$. Considere em $C$ a corda $\overline{AB}$ cujo ponto medio é $M:(2,2)$. O comprimento de $\overline{AB}$ (em unidades de comprimento) é igual a:

(A) $2\sqrt{6}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) $2$. (D) $2\sqrt{3}$. (E) n.d.a.

**Questão 24:** Dados os pontos $A:(0,8)$, $B:(-4,0)$ e $C:(4,0)$, sejam $r$ e $s$ as retas tais que $A,B\in r$, $B,C\in s$. Considere $P_1$ e $P_2$ os pés das retas perpendiculares traçadas de $P:(5,3)$ às retas $r$ e $s$, respectivamente. Então a equação da reta que passa por $P_1$ e $P_2$ é:

(A) $y+x=5$. (B) $y+2x=5$. (C) $3y-x=15$. (D) $x+y=2$. (E) n.d.a.

**Questão 25:** Considere as afirmações:

I. Uma elipse tem como focos os pontos $F_1:(-2,0)$, $F_2:(2,0)$ e o eixo maior 12. Sua equação é $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$;

II. Os focos de uma hipérbole são $F_1:(-\sqrt{5},0)$, $F_2:(\sqrt{5},0)$ e sua excentricidade é $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Sua equação é $3x^2-2y^2=6$;

III. A parábola $2y=x^2-10x-100$ tem como vértice o ponto $P:\left(5,\frac{125}{2}\right)$.

Então:

(A) Todas as afirmações são falsas.
(B) Apenas as afirmações II e III são falsas.
(C) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
(D) Apenas a afirmação III é verdadeira.
(E) n.d.a.

# I.23 Vestibular 1991

**Questão 01:** Considere as afirmações:

I. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, então a composição $g \circ f$ é uma função par;

II. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar, então a composição $f \circ g$ é uma função par;

III. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar e inversível então $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar.

Então:

(A) Apenas a afirmação I é falsa.
(B) Apenas as afirmações I e II são falsas.
(C) Apenas a afirmação III é verdadeira.
(D) Todas as afirmações são falsas.
(E) n.d.a.

**Questão 02:** Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$.

A função inversa de $f$ é dada por:

(A) $\log_a(x - \sqrt{x^2 - 1})$, para $x > 1$.
(B) $\log_a(-x + \sqrt{x^2 + 1})$, para $x \in \mathbb{R}$.
(C) $\log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$, para $x \in \mathbb{R}$.
(D) $\log_a(-x + \sqrt{x^2 - 1})$, para $x < -1$.
(E) n.d.a.

**Questão 03:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ se } x \leq 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \ln x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$.

Se $D$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ tal que $f : D \to \mathbb{R}$ é injetora, então:

(A) $D = \mathbb{R}$ e $f(D) = [-1, +\infty[$.
(B) $D = ]-\infty, 1] \cup ]e, +\infty[$ e $f(D) = ]-1, +\infty[$.
(C) $D = [0, +\infty[$ e $f(D) = ]-1, -\infty[$.
(D) $D = [0, e]$ e $f(D) = [-1, 1]$.
(E) n.d.a.

**Obs.:** Esta questão pode ser resolvida graficamente.

**Questão 04:** Sejam $w = a + bi$ com $b \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. O conjunto dos números complexos $z$, que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$, descreve:

(A) Um par de retas paralelas.
(B) Uma circunferência.
(C) Uma elipse.
(D) Uma reta com coeficiente angular $m = \dfrac{a}{b}$.
(E) n.d.a.

**Questão 05:** Se $z = \cos t + i \operatorname{sen} t$, onde $0 < t < 2\pi$, então podemos afirmar que $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ é dado por:

(A) $i \operatorname{cotg} \dfrac{t}{2}$. (B) $i \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}$. (C) $i \operatorname{cotg} t$. (D) $i \operatorname{tg} t$. (E) n.d.a.

**Questão 06:** Os valores de $m$, de modo que a equação $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$ tenha duas de suas raízes somando um, são:

(A) 0. (B) $\sqrt{3}$ e 3. (C) 1 e $-1$. (D) 2 e $-2$. (E) n.d.a.

**Questão 07:** Seja $S$ o conjunto de todas as raízes da equação $12x^3 - 16x^2 - 3x + 4 = 0$. Podemos afirmar que:

(A) $S \subset ]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, 2[$.
(B) $S \subset ]-2, -1[ \cup ]0, 1[ \cup ]3, 4[$.
(C) $S \subset [0, 4]$.
(D) $S \subset ]-2, -1[ \cup ]1, 2[ \cup ]3, 4[$.
(E) n.d.a.

**Questão 08:** Considere as afirmações:

I. A equação $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ só admite raízes reais;

II. Toda equação recíproca admite um número par de raízes;

III. As raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$ são exatamente o dobro das raízes de $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

Então:

(A) Apenas I é verdadeira.
(B) Apenas II é falsa.
(C) Apenas III é verdadeira.
(D) Todas são verdadeiras.
(E) n.d.a.

**Questão 09:** Se $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 2x - 3|\}$, então temos:

(A) $A = \left[-2, \dfrac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty[$. (B) $A = \left[\dfrac{1}{2}, 4\right]$. (C) $A = [-3, 1]$.
(D) $A = ]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$. (E) n.d.a.

**Questão 10:** Na divisão de $P(x) = a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3$ por $x - 1$, obteve-se o quociente $Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ e o resto $-6$. Sabe-se que $(b_4, b_3, b_2, b_1)$ é uma progressão geométrica de razão $q > 0$ e $q \neq 1$. Podemos afirmar:

(A) $b_2 - a_3 = 10$. (B) $b_4 + a_4 = 6$. (C) $b_3 + b_0 = 12$. (D) $b_4 + b_1 = 16$. (E) n.d.a.

**Questão 11:** Numa progressão geométrica de razão $q$, sabe-se que:

I. o produto do logaritmo natural do primeiro termo $a_1$ pelo logaritmo natural da razão é 24;

II. a soma do logaritmo natural do segundo termo com o logaritmo natural do terceiro termo é 26;

Se $\ln q$ é um número inteiro então o termo geral $a_n$ vale:

(A) $e^{6n-2}$. (B) $e^{4+6n}$. (C) $e^{24n}$. (D) $e^{4-6n}$. (E) n.d.a.

**Obs.:** $\ln q$ denota o logaritmo natural (ou neperiano) de $q$.

**Questão 12:** O conjunto dos números reais que verificam a inequação $3\log x + \log(2x+3)^3 \leq 3\log 2$ é dado por:

(A) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. (B) $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$. (C) $\left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$.

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq x < 1\right\}$. (E) n.d.a.

**Obs.:** $\log a$ denota o logaritmo de $a$ na base 10.

**Questão 13:** Sejam $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$ e $B = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 11^k$. Se $\ln B - \ln A - \ln \frac{6561}{4}$ então $n$ é igual a:

(A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 8. (E) n.d.a.

**Questão 14:** Uma escola possui 18 professores sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, com no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química?

(A) 875. (B) 1877. (C) 1995. (D) 2877. (E) n.d.a.

**Questão 15:** Sejam $m$ e $n$ números reais com $m \neq n$ e as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Para que a matriz $mA + nB$ seja não inversível é necessário que:

(A) $m$ e $n$ sejam positivos.
(B) $m$ e $n$ sejam negativos.
(C) $m$ e $n$ tenham sinais contrários.
(D) $n^2 = 7m^2$.
(E) n.d.a.

**Questão 16:** Sejam $M$ e $B$ matrizes quadradas de ordem $n$ tais que $M - M^{-1} = B$. Sabendo que $M^t = M^{-1}$ podemos afirmar que:

(A) $B^2$ é a matriz nula.
(B) $B^2 = -2I$.
(C) $B$ é simétrica.
(D) $B$ é anti-simétrica.
(E) n.d.a.

**Obs.:** $M^t$ e $M^{-1}$ denotam, respectivamente, a matriz transposta de $M$ e a matriz inversa de $M$. Por $I$ denotamos a matriz identidade de ordem $n$.

**Questão 17:** Considere o sistema:

$$(P) \begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2 w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

Podemos afirmar que $(P)$ é possível e determinado quando:
(A) $k \neq 0$. (B) $k \neq 1$. (C) $k \neq -1$. (D) $k \neq 0$ e $k \neq -1$. (E) n.d.a.

**Questão 18:** Se $(x, y, z, t)$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

Qual das alternativas abaixo é verdadeira?

(A) $x + y + z + t$ e $x$ têm o mesmo sinal.
(B) $x - y + z + t$ e $t$ têm o mesmo sinal.
(C) $x + y + z + t$ e $y$ têm o mesmo sinal.
(D) $x + y + z + t$ e $z$ têm sinais contrários.
(E) n.d.a.

**Questão 19:** Um triângulo $ABC$ está inscrito num círculo de raio $2\sqrt{3}$. Sejam $a$, $b$ e $c$ os lados opostos aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ respectivamente. Sabendo que $a = 2\sqrt{3}$ e $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ é uma progressão aritmética, podemos afirmar que:

(A) $c = 4\sqrt{3}$ e $\hat{A} = 30°$. (B) $c = 3\sqrt{3}$ e $\hat{A} = 30°$. (C) $b = 6$ e $\hat{C} = 85°$.
(D) $b = 3$ e $\hat{C} = 90°$. (E) n.d.a.

**Questão 20:** Se $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $\operatorname{arcsen} \dfrac{a-1}{a+1}$ está no primeiro quadrante. então o valor de $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{a-1}{a+1} + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)$ é:

(A) $\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{a}}{3a+1}$. (C) $\dfrac{2a\sqrt{a}}{3a+1}$. (D) $\dfrac{2a}{3a+1}$. (E) n.d.a.

**Questão 21:** Sejam $a$ e $b$ constantes reais positivas. Para que a equação $\cos^3 x + (a-1)\cos^2 x - (a+b)\cos x + b = 0$ tenha duas raízes reais distintas no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ devemos ter:

(A) $0 < b \leq a - 1$. (B) $0 < b < a + 1$. (C) $a < b < a + 2$.
(D) $a + 1 < b \leq a + 2$. (E) n.d.a.

**Questão 22:** Considere a região do plano cartesiano $xOy$ definida pela desigualdade: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 \leq 0$. Quando esta região rodar um ângulo de $\dfrac{\pi}{3}$ radianos em torno da reta $y + x + 1 = 0$, ela irá gerar um sólido cujo volume é igual a:

(A) $\dfrac{4\pi}{3}$. (B) $\dfrac{2\pi}{3}$. (C) $\dfrac{\pi}{3}$. (D) $\dfrac{1\pi}{9}$. (E) n.d.a.

**Questão 23:** As arestas da base de uma pirâmide triangular regular medem $\ell$ cm e as faces laterais são triângulos retângulos. O volume desta pirâmide é:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\ell^3$ cm$^3$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\ell^3$ cm$^3$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{24}\ell^3$ cm$^3$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}\ell^3$ cm$^3$. (E) n.d.a.

**Questão 24:** Seja $r$ a mediatriz do segmento de reta de extremos $M = (-4, -6)$ e $N = (8, -2)$. Seja $R$ o raio da circunferência com centro na origem e que tangencia a reta $r$. Então:

(A) $R = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$. (B) $R = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. (C) $R = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$. (D) $R = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$. (E) n.d.a.

**Questão 25:** Seja $C$ a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$. Se $P = (a, b)$ é o ponto em $C$ mais próximo da origem, então:

(A) $a = -\dfrac{3}{2}$ e $4b^2 + 24b + 15 = 0$.

(B) $a = -\dfrac{1}{2}$ e $4b^2 + 24b + 33 = 0$.

(C) $a = \dfrac{\sqrt{10}}{10} - 1$ e $b = 3a$.

(D) $a = -1 - \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ e $b = 3a$.

(E) n.d.a.

## I.24 Vestibular 1990

**Questão 01:** Dadas as funções $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $g(x) = x \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

(A) ambas são pares.
(B) $f$ é par e $g$ é impar.
(C) $f$ é impar e $g$ é par.
(D) $f$ não é par e nem ímpar e $g$ é par.
(E) ambas são ímpares.

**Questão 02:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $\begin{cases} x+2, & \text{se } x \leq -1 \\ x^2, & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Lembrando que se $A \subset \mathbb{R}$ então $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}$ considere as afirmações:

I. $f$ não é injetora e $f^{-1}([3,5]) = \{4\}$;

II. $f$ não é sobrejetora e $f^{-1}([3,5]) = f^{-1}([2,6])$;

III. $f$ é injetora e $f^{-1}([0,4]) = [-2,+\infty[$.

Então podemos garantir que:

(A) apenas as afirmações II e III são falsas.
(B) as afirmações I e III são verdadeiras.
(C) apenas a afirmação II é verdadeira.
(D) apenas a afirmação III é verdadeira.
(E) todas as afirmações são falsas.

**Questão 03:** Seja a função $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2} - 1$. Sobre sua inversa podemos garantir que:

(A) não está definida pois $f$ não é injetora.
(B) não está definida pois $f$ não é sobrejetora.
(C) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{y-3}$, $y \neq 3$.
(D) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y+5}{y-3} - 1$, $y \neq 3$.
(E) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{2y-5}{y-3}$, $y \neq 3$.

**Questão 04:** Considere as equações $z^4 = i$ e $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$ onde $z$ é complexo. Seja $S_1$ o conjunto das raízes da primeira equação e $S_2$ o da segunda. Então:

(A) $S_1 \cap S_2$ é vazio.
(B) $S_1 \cap S_2 \subset \mathbb{R}$.
(C) $S_1$ possui apenas dois elementos distintos.
(D) $S_1 \cap S_2$ é unitário.
(E) $S_1 \cap S_2$ possui dois elementos.

**Questão 05:** A igualdade $1 + |z| = |1 + z|$, onde $z \in \mathbb{C}$, é satisfeita:

(A) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\, z = 0$ e $\mathrm{Im}\, z = 0$.
(B) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ e $\mathrm{Im}\, z = 0$.
(C) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$.
(D) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Im}\, z = 0$.
(E) para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$.

**Obs.:** $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos, $\mathrm{Re}\, z$ a parte real de $z$ e $\mathrm{Im}\, z$ a parte imaginária de $z$.

**Questão 06:** Seja $p(x) = 16x^5 - 78x^4 + \ldots + a_1 x - 5$ um polinômio de coeficientes reais tal que a equação $p(x) = 0$ admite mais do que uma raiz real e, ainda, $a + bi$ é uma raiz complexa desta equação com $ab \neq 0$. Sabendo-se que $\frac{1}{a}$ é a razão da progressão geométrica formada pelas raízes reais de $p(x) = 0$ e que a soma destas raízes reais vale $\frac{7}{8}$ enquanto que o produto é $\frac{1}{64}$, o valor de $a_1$ é:

(A) 32. (B) 56. (C) 71. (D) 11. (E) 0.

**Questão 07:** O conjunto das soluções reais da equação $\ln(\mathrm{sen}^2 x) = \ln(\mathrm{sen}^2 x)$ é dado por:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(B) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \pi + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(C) $\{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
(D) $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.
(E) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

**Questão 08:** Sabendo-se que $3x - 1$ é fator de $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1$ então as soluções reais da equação $12(3^{3x}) - 19(3^{2x}) + 8(3^x) - 1 = 0$ somam:

(A) $-\log_3 12$. (B) 1. (C) $-\frac{1}{3}\log_3 12$. (D) $-1$. (E) $\log_3 7$.

**Questão 09:** Numa progressão geométrica de três termos a razão é $e^{-2a}$, a soma dos termos é 7 enquanto que a diferença do último termo com o primeiro é 3. Nestas condições o valor de $a$ é:

(A) $\ln 2$.

(B) $-\ln \frac{5}{2}$.

(C) $\ln \sqrt{3}$.

(D) $-\ln \sqrt{2}$.

(E) Não existe número real $a$ nestas condições.

**Questão 10:** Sejam as funções $f$ e $g$ dadas por: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } |x| < 1 \\ 0 \text{ se } |x| \geq 1 \end{cases}$ e $g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$. Sobre a composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ podemos garantir que:

(A) se $x \geq \frac{3}{2}$, $f(g(x)) = 0$.

(B) se $1 < x < \frac{3}{2}$, $f(g(x)) = 1$.

(C) se $\frac{4}{3} < x < 2$, $f(g(x)) = 1$.

(D) se $1 < x \leq \frac{4}{3}$, $f(g(x)) = 1$.

(E) n.d.a.

**Questão 11:** Sejam os números reais $\alpha$ e $x$ onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $x \neq 0$. Se no desenvolvimento de $\left[(\cos\alpha)x + (\operatorname{sen}\alpha)\frac{1}{x}\right]^8$ o termo independente de $x$ vale $\frac{35}{8}$, então o valor de $\alpha$ é:

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) $\frac{\pi}{12}$. (D) $\frac{\pi}{4}$. (E) n.d.a.

**Questão 12:** Sejam $a$ e $b$ constantes reais positivas. Considere $x = a^2 \operatorname{tg} t - 1$ e $y^2 = b^2 \sec^2 t - b^2$ em que $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. Então uma relação entre $x$ e $y$ é dada por:

(A) $y = \frac{b}{a}(x-1)^2$, $x \geq a$. (B) $y = \frac{b^2}{a^4}(x-1)^2$, $x \geq 1$. (C) $y = \frac{b}{a^2}(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(D) $y = \frac{-b}{a^2}(x-1)$, $x \geq 1$. (E) $y = \frac{a^2}{b^4}(x-1)$, $x \leq 1$.

**Questão 13:** Sabendo-se que $\theta$ é um ângulo tal que $2\operatorname{sen}(\theta - 60^\circ) = \cos(\theta + 60^\circ)$ então $\operatorname{tg}\theta$ é um número da forma $a + b\sqrt{3}$ em que:

(A) $a$ e $b$ são reais negativos.
(B) $a$ e $b$ são inteiros.
(C) $a + b = 1$.
(D) $a$ e $b$ são pares.
(E) $a^2 + b^2 = 1$.

**Questão 14:** Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & 2 \\ \log_3 10 & 2\operatorname{sen} x \end{bmatrix}$ onde $x$ é real.

Então podemos afirmar que:

(A) $A$ é inversível apenas para $x > 0$.
(B) $A$ é inversível apenas para $x = 0$.
(C) $A$ é inversível para qualquer $x$.
(D) $A$ é inversível apenas para $x$ da forma $(2k+1)\pi$, $k$ inteiro.
(E) $A$ é inversível apenas para $x$ da forma $2k\pi$, $k$ inteiro.

**Questão 15:** Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes quadradas $n \times n$ tais que $A$ e $B$ são inversíveis e $ABCA = A^t$, onde $A^t$ é a transposta da matriz $A$. Então, podemos afirmar que:

(A) $C$ é inversível e $\det C = \det (AB)^{-1}$.
(B) $C$ não é inversível pois $\det C = 0$.
(C) $C$ é inversível e $\det C = \det B$.
(D) $C$ é inversível e $\det C = (\det A)^2 . \det B$.
(E) $C$ é inversível e $\det C = \dfrac{\det A}{\det B}$.

**Obs.:** $\det X$ denota o determinante da matriz quadrada $X$.

**Questão 16:** Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de um qualquer dos sistemas for também uma solução do outro. Considere as seguintes afirmações:

I. Dois sistemas de equações lineares, $3 \times 3$, ambos homogêneos, são equivalentes;

II. Dois sistemas de equações lineares, $3 \times 3$, ambos indeterminados, não são equivalentes;

III. Os dois sistemas de equações lineares dados a seguir são equivalentes:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 8 \\ x + y + z = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 4 \\ 4x - y + 2z = 14 \end{cases}$$

De acordo com a definição dada podemos dizer que:

(A) as três afirmações são verdadeiras.
(B) apenas a afirmação I é verdadeira.
(C) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
(D) apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
(E) as três afirmações são falsas.

**Questão 17:** Considere o sistema linear homogêneo nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dado por

$$\begin{cases} a_1 x_1 + (a_1 + 1)x_2 + \ldots + (a_1 + n - 1)x_n = 0 \\ a_2 x_1 + (a_2 + 1)x_2 + \ldots + (a_2 + n - 1)x_n = 0 \\ \ldots \\ a_n x_1 + (a_n + 1)x_2 + \ldots + (a_n + n - 1)x_n = 0 \end{cases}$$

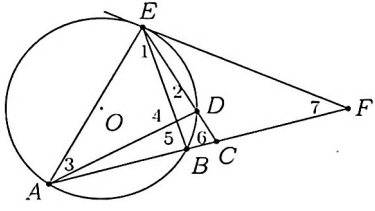
em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais dados. Sobre a solução deste sistema podemos afirmar que:

(A) se $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ o sistema possui uma única solução.
(B) se $a_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ o sistema possui uma única solução.
(C) se $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ o sistema é impossível.
(D) se $a_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ o sistema é impossível.
(E) o sistema possui infinitas soluções quaisquer que sejam os valores dos números $a_1, \ldots, a_n$ dados.

**Questão 18:** Há muito tempo, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a ideia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma ideia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas do baú em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada um dos marinheiros a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos. Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de $\frac{29}{17}$ então o número de moedas que havia originalmente no baú era:

(A) 99. (B) 95. (C) 135. (D) 87. (E) n.d.a.

**Questão 19:** Na figura *abaixo* $O$ é o centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por $E$ e $F$ é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos 1, 2 e 3 são dadas, respectivamente, por 49°, 18°, 34°, determinar a medida dos ângulos 4, 5, 6 e 7. Nas alternativas a seguir considere os valores dados iguais às medidas de 4, 5, 6 e 7, respectivamente:




(A) 97°, 78°, 61°, 26°. (B) 102°, 79°, 58°, 23°. (C) 92°, 79°, 61°, 30°.
(D) 97°, 79°, 61°, 27°. (E) 97°, 80°, 62°, 29°.

**Questão 20:** Sejam as retas $r$ e $s$ dadas respectivamente pelas equações $3x - 4y + 12 = 0$ e $3x - 4y + 4 = 0$. Considere $\ell$ o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam simultaneamente $r$ e $s$. Uma equação que descreve $\ell$ é dada por:

(A) $3x - 4y + 8 = 0$. (B) $3x + 4y + 8 = 0$. (C) $x - y + 1 = 0$.
(D) $x + y = 0$. (E) $3x - 4y - 8 = 0$.

**Questão 21:** Seja $C$ o centro da circunferência $x^2+y^2-6\sqrt{2}y = 0$. Considere $A$ e $B$ os pontos de interseção desta circunferência com a reta $y = \sqrt{2}x$. Nestas condições o perímetro do triângulo de vértices $A$, $B$ e $C$ é:

(A) $6\sqrt{2}+\sqrt{3}$. (B) $4\sqrt{3}+\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. (D) $5\sqrt{3}+\sqrt{2}$. (E) n.d.a.

**Questão 22:** Considere a reta $r$ mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta $2x - 3y + 7 = 0$ intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ à reta $r$ é:

(A) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{4}{\sqrt{13}}$. (C) $3\sqrt{13}$. (D) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$. (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

**Questão 23:** Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede $x$ cm. Sua altura é igual ao menor lado de um triângulo $ABC$ inscritível num círculo de raio $x$ cm. Sabendo que o triângulo $ABC$ é semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, o volume do prisma em $cm^3$ é:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}x^3$. (B) $\frac{2\sqrt{2}}{5}x^3$. (C) $\frac{3\sqrt{3}}{10}x^3$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{10}x^3$. (E) n.d.a.

**Questão 24:** Seja $V$ o vértice de uma pirâmide com base triangular $ABC$. O segmento $\overline{AV}$, de comprimento unitário, é perpendicular à base. Os ângulos das faces laterais, no vértice $V$, são todos de 45 graus. Deste modo, o volume da pirâmide será igual a:

(A) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$. (B) $\frac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. (C) $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
(D) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$. (E) n.d.a.

**Questão 25:** Considere a região do plano cartesiano $xOy$ definida pelas desigualdades $x - y \leq 1$, $x + y \geq 1$ e $(x-1)^2 + y^2 \leq 2$. O volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo $x$ é igual a:

(A) $\frac{4}{3}\pi$. (B) $\frac{8}{3}\pi$. (C) $\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\pi$. (D) $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)\pi$. (E) n.d.a.

# I.25 Vestibular 1989

**Questão 01:** Os valores de $\alpha$, $0 < \alpha < \pi$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, para os quais a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x^2 - 4x - \operatorname{tg}^2\alpha = 0$ assume seu valor mínimo igual a $-4$, são

(A) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$. (B) $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{2\pi}{5}$. (C) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{7}$ e $\frac{2\pi}{7}$. (E) $\frac{2\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{5}$.

**Questão 02:** Sejam $A$, $B$ e $C$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios, e $A - B = \{p \in \mathbb{R} : p \in A \text{ e } p \notin B\}$. Dadas as igualdades:

I. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$;

II. $(A - B) \times C = (A \times B) - (B \times C)$;

III. $(A \cap B) - A \neq (B \cap A) - B$;

IV. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;

V. $(A - B) \cap (B - C) = (A - C) \cap (A - B)$,

podemos garantir que

(A) II e IV são verdadeiras.
(B) I e V são verdadeiras.
(C) III e IV são verdadeiras.
(D) I e IV são verdadeiras.
(E) I e III são verdadeiras.

**Questão 03:** Sejam $A$ e $B$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios, possuindo $B$ mais de um elemento. Dada uma função $f : A \to B$, definimos $L : A \to (A \times B)$ por $L(a) = (a, f(a))$, para todo $a \in A$. Podemos afirmar que

(A) A função $L$ sempre será injetora.
(B) A função $L$ sempre será sobrejetora.
(C) Se $f$ for sobrejetora, então $L$ também o será.
(D) Se $f$ não for injetora, então $L$ também não o será.
(E) Se $f$ for bijetora, então $L$ será sobrejetora.

**Questão 04:** O valor da expressão $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$, sendo $z$ um número complexo, é:

(A) 5, se $|z| \leq 1$. (B) 4, se $|z| = 1$. (C) 0, se $\operatorname{Im}(z) = 0$.
(D) 2, para todo $z$. (E) 3, se $\operatorname{Re}(z) = 0$.

**Questão 05:** A equação da parábola, cujo eixo é perpendicular ao eixo $x$ e que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2ax + 2y = 0$, com $a > 1$, e pelos pontos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ é

(A) $(a^2-1)y = a^2(x^2-1)$. (B) $(a^2-1)y = a^2(1-x^2)$. (C) $(a^2-1)y = x^2-1$.
(D) $(a^2-1)y = a(x^2-1)$. (E) $(a^2-1)y = -x^2+1$.

**Questão 06:** Considerando que a imagem da função arcsen é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $i = \sqrt{-1}$, podemos garantir que $\operatorname{arcsen}\left|\frac{1+xi}{1-xi}\right|$ está definida

(A) apenas para $x = 0$ e vale $\frac{\pi}{2}$.
(B) para todo $x \in \mathbb{R}$ e vale $\frac{\pi}{2}$.
(C) apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$ e seu valor depende do valor de $x$.
(D) apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 1$ e seu valor é $\pi$.
(E) apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq -1$ e seu valor depende do valor de $x$.

**Questão 07:** O produto dos números complexos $z = x + yi$, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta $y = 2x - 1$ contida no plano complexo, é igual a:

(A) $\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$. (B) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$. (C) $-\frac{8}{5} - \frac{8}{5}i$. (D) $2 + 2i$.
(E) não existe nenhum número complexo que pertence à reta $y = 2x - 1$ e cujo módulo seja $\sqrt{2}$.

**Questão 08:** Um cone e um cilindro, ambos retos, possuem o mesmo volume e bases idênticas. Sabendo-se que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio $R$, então a altura $H$ do cone será igual a

(A) $\frac{6}{5}R$. (B) $\frac{3}{2}R$. (C) $\frac{4}{3}R$. (D) $\frac{2}{3}R$. (E) $\frac{7}{5}R$.

**Questão 09:** Justapondo-se as bases de dois cones retos idênticos de altura $H$, forma-se um sólido de volume $v$. Admitindo-se que a área da superfície deste sólido é igual à área da superfície de uma esfera de raio $H$ e volume $V$, a razão $v/V$ vale:

(A) $\frac{\sqrt{11}-1}{4}$. (B) $\frac{\sqrt{13}-1}{4}$. (C) $\frac{\sqrt{15}-1}{4}$. (D) $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$. (E) $\frac{\sqrt{19}-1}{4}$.

**Questão 10:** Os lados congruentes de um triângulo isósceles formam um ângulo de 30 graus e o lado oposto a este ângulo mede $x$ cm. Este triângulo é a base de uma pirâmide de altura $H$ cm, que está inscrita em um cilindro de revolução. Deste modo, o volume $V$, em centímetros cúbicos, deste cilindro é igual a

(A) $2\pi x^2 H$. (B) $\frac{1}{3}\pi x^2 H$. (C) $\frac{2}{3}\pi x^2 H$. (D) $3\pi x^2 H$. (E) $\pi x^2 H$.

**Questão 11:** As circunferências $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4y$ possuem um ponto comum $P$, distinto da origem. Obtenha a equação da reta tangente à primeira circunferência no ponto $P$.

(A) $5x + 10y = 16$. (B) $5x + 15y = 20$. (C) $5x + 5y = 12$.
(D) $3x + 4y = 8$. (E) $10x - 5y = 20$.

**Questão 12:** A distância entre os pontos de intersecção da reta $\frac{x}{10} + \frac{y}{20} = 1$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 400$ é:

(A) $16\sqrt{5}$. (B) $4\sqrt{5}$. (C) $3\sqrt{3}$. (D) $4\sqrt{3}$. (E) $5\sqrt{7}$.

**Questão 13:** Seja $s$ a reta do plano cartesiano, que passa pelo ponto $(1, 3)$ e é perpendicular à reta $x+y+1 = 0$. Considere uma circunferência com centro na origem e raio $R > 0$. Nestas condições, se $s$ for tangente à circunferência, então:

(A) $R$ é um número irracional e $R < \frac{1}{2}$.
(B) $R$ é um número irracional e $\frac{1}{2} < R < 1$.
(C) $R$ é um número irracional e $R > 1$.
(D) $R$ é um número racional e $R > 1$.
(E) $R$ é um número racional e $R < 1$.

**Questão 14:** O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 28 = 0$ que tem ordenada máxima é:

(A) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, -\frac{9}{2}\right)$. (B) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}, -1)$. (C) $\left(-\frac{3}{10}, -1\right)$.
(D) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, -2\right)$. (E) $(-2, -4)$.

**Questão 15:** Se $\operatorname{tg}(2A) = 5$ então $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + A\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - A\right)$ é igual a:

(A) $-40/21$. (B) $-2$. (C) $5$. (D) $8$. (E) $10$.

**Questão 16:** Sobre a expressão $M = \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_5 x}$, onde $2 < x < 3$, qual das afirmações abaixo está correta?

(A) $1 \leq M \leq 2$. (B) $2 < M < 4$. (C) $4 \leq M \leq 5$.
(D) $5 < M < 7$. (E) $7 \leq M \leq 10$.

**Questão 17:** Considere o desenvolvimento $(x+y)^{10} = A_1x^{10} + A_2x^9y + \ldots$, onde $x$ e $y$ são números reais. A oitava parcela do lado direito é igual a $\dfrac{405}{2}(\log_k 2)^3$, para algum $k > 1$, $x = \dfrac{2\log_2 k}{\sqrt{\log_k 2}}$ e $y = \dfrac{\sqrt{\log_k 2}}{2\log_2 k}$. Neste caso,

(A) $k^2 = 2$. (B) $k^2 = 3$. (C) $k^3 = 2$. (D) $k^3 = 7$. (E) $k^3 = 5$.

**Questão 18:** Numa progressão geométrica de razão $q$ sabemos que $a_1 = \dfrac{1}{q}$, $a_1a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5$ e o produto dos $n$ primeiros termos é $q^{20}$. Então a soma dos $n$ primeiros termos é igual a:

(A) $\dfrac{1}{2}\dfrac{3^8 - 2^8}{3^6}$. (B) $\dfrac{1}{2}\dfrac{3^6 - 2^6}{3^6}$. (C) $\dfrac{1}{4}\dfrac{3^8 - 2^8}{3^6}$. (D) $\dfrac{1}{4}\dfrac{3^6 - 2^6}{3^6}$. (E) $\dfrac{1}{4}\dfrac{3^6 - 2^6}{3^8}$.

**Questão 19:** Numa progressão aritmética com $n$ termos, $n > 1$, sabemos que o primeiro é igual a $(1+n)/n$ e a soma deles vale $(1+3n)/2$. Então o produto da razão desta progressão pelo último termo é igual a

(A) $2n$. (B) $2/n$. (C) $3n$. (D) $3/n$. (E) $5n$.

**Questão 20:** Escreva o desenvolvimento do binômio $(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{cosec}^6 x)^m$, onde $m$ é um número inteiro maior que zero, em termos de potências inteiras de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Para determinados valores do expoente, este desenvolvimento possuirá uma parcela $P$, que não conterá a função $\operatorname{sen} x$. Seja $m$ o menor valor para o qual isto ocorre. Então $P = -64/9$ quando $x$ for igual a

(A) $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k$ inteiro.

(B) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k$ inteiro.

(C) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k$ inteiro.

(D) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k$ inteiro.

(E) não existe $x$ satisfazendo a igualdade desejada.

**Questão 21:** O sistema de equações $\begin{cases} x + 3y - z = 6 \\ 7x + 3y + 2z = 2 \\ 5x - 3y + 4z = 10 \end{cases}$

(A) tem somente uma solução.
(B) tem infinitas soluções com $9(x + y) = 14$ e $9(2y - z) = 40$.
(C) tem infinitas soluções com $9(x + y) = 34$ e $9(2y - z) = 20$.
(D) tem infinitas soluções com $x$ dado em função de $y$ e $z$.
(E) não possui solução.

**Questão 22:** Sendo $A, B, C$ matrizes reais $n \times n$, considere as seguintes afirmações:

I. $A(BC) = (AB)C$;

II. $AB = BA$;

III. $A + B = B + A$;

IV. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$;

V. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Então podemos afirmar que:

(A) I e II são corretas.
(B) II e III são corretas.
(C) III e IV são corretas.
(D) IV e V são corretas.
(E) V e I são corretas.

**Questão 23:** Considere a equação $x \begin{bmatrix} 4 \\ -16 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

onde $x$, $y$ e $z$ são números reais. É verdade que:

(A) a equação admite somente uma solução.
(B) em qualquer solução, $x^2 = z^2$.
(C) em qualquer solução, $16x^2 = 9z^2$.
(D) em qualquer solução, $25y^2 = 16z^2$.
(E) em qualquer solução, $9y^2 = 16z^2$.

**Questão 24:** Sendo $A \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ então o elemento da terceira linha e primeira coluna, de sua inversa, será igual a

(A) $5/8$. (B) $9/11$. (C) $6/11$. (D) $-2/11$. (E) $1/13$.

**Questão 25:** Dadas as afirmações:

I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares;

II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares;

III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então este paralelogramo é um losango.

Podemos garantir que:

(A) Todas são verdadeiras.
(B) Apenas I e II são verdadeiras.
(C) Apenas II e III são verdadeiras.
(D) Apenas II é verdadeira.
(E) Apenas III é verdadeira.

**Questão 26:** Considere um quadrilátero $ABCD$ cujas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm. Se $R$, $S$, $T$ e $U$ são os pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero $RSTU$ vale:

(A) 22 cm. (B) 5,5 cm. (C) 8,5 cm. (D) 11 cm. (E) 13 cm.

**Questão 27:** Numa circunferência de centro $O$, os pontos $A$, $B$ e $C$ são vértices de um triângulo equilátero. Seja $D$ um quarto ponto da circunferência, não coincidente com os demais. Sobre a medida $x$ do ângulo $A\hat{D}C$ podemos afirmar que:

(A) $0° < x < 30°$ ou $60° < x < 120°$.
(B) $x = 60°$ ou $x = 120°$.
(C) $x = 45°$ ou $x = 150°$.
(D) $x = 240°$ para qualquer posição de $D$ na circunferência.
(E) $x = 30°$ para qualquer posição de $D$ na circunferência.

**Questão 28:** Considere uma circunferência de centro em $O$ e diâmetro $\overline{AB}$. Tome um segmento $\overline{BC}$ tangente à circunferência, de modo que o ângulo $B\hat{C}A$ meça $30°$. Seja $D$ o ponto de encontro da circunferência com o segmento $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$ o segmento paralelo a $\overline{AB}$, com extremidades sobre a circunferência. A medida do segmento $\overline{DE}$ será igual

(A) à metade da medida de $\overline{AB}$.
(B) um terço da medida de $\overline{AB}$.
(C) à metade da medida de $\overline{DC}$.
(D) dois terços da medida de $\overline{AB}$.
(E) à metade da medida de $\overline{AE}$.

**Questão 29:** Se num quadrilátero convexo de área $S$, o ângulo agudo entre as diagonais mede $\pi/6$ radianos, então o produto do comprimento destas diagonais é igual a

(A) $S$. (B) $2S$. (C) $3S$. (D) $4S$. (E) $5S$.

**Questão 30:** Se o perímetro de um triângulo inscrito num círculo medir $20x$ cm e a soma dos senos de seus ângulos internos for igual a $x$, então a área do círculo, em cm$^2$, será igual a:

(A) $50\pi$. (B) $75\pi$. (C) $100\pi$. (D) $125\pi$. (E) $150\pi$.

**Problema 01:** Sabendo-se que $x$ e $y$ são reais, tais que $x+y = \dfrac{3\pi}{4}$, verifique se a matriz $\begin{bmatrix} 2\operatorname{tg} x & 1+\operatorname{tg} x \\ 1+\operatorname{tg} y & \operatorname{tg} y \end{bmatrix}$ é ou não inversível.

**Problema 02:** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que

a) $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é injetora. Verifique se $f$ é injetora e justifique sua resposta.

b) $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é sobrejetora. Verifique se $g$ é sobrejetora e justifique sua resposta.

**Problema 03:** Determine a equação da reta suporte de um segmento que tem seu centro no ponto $(5, 0)$ e extremidades em cada uma das retas $x - 2y - 3 = 0$ e $x + y + 1 = 0$. Dê a resposta na forma $Ax + By + C = 0$.

**Problema 04:** Num triângulo $ABC$, $D$ é um ponto médio do segmento $\overline{AC}$ e $E$ um ponto do segmento $\overline{AB}$. Sabendo-se que $m(\overline{AB}) = 3\,m(\overline{AE})$, determine a razão entre a área do quadrilátero $BCDE$ e a do triângulo $ADE$.

**Problema 05:** O lado da base maior de um tronco de pirâmide hexagonal regular, com bases paralelas, mede $L$ cm. A altura do tronco é igual à metade do apótema desta mesma base. As faces laterais formam um ângulo de 30 graus com a base. Calcule o apótema $a$, o lado $\ell$, ambos da base menor, a altura $h$ da face lateral e a área total $S$ do tronco, todos em função de $L$.

## I.26 Vestibular 1988

**Questão 01:** Sejam $A$, $B$ e $C$ subconjuntos do conjunto dos números reais. Então podemos afirmar que:
(A) $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$.
(B) $(A \cup B)^C = A^C \cup B^C$.
(C) Se $A \subset B$ então $A^C \subset B^C$.
(D) $(A \cap B) \cup C^C = (A^C \cup C)^C \cap (B^C \cup C)^C$.
(E) $A \cup (B \cup C)^C = (A \cup B^C) \cap (A \cup C^C)$.

**Questão 02:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente decrescente, isto é, quaisquer $x$ e $y$ reais com $x < y$ tem-se $f(x) > f(y)$. Dadas as afirmações:

I. $f$ é injetora;

II. $f$ pode ser uma função par;

III. Se $f$ possui inversa então sua inversa também é estritamente decrescente.

Podemos assegurar que:
(A) apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
(B) apenas as afirmações II e III são falsas.
(C) apenas a afirmação I é falsa.
(D) todas as afirmações são verdadeiras.
(E) apenas a afirmação II é verdadeira.

**Questão 03:** Sejam $f$ e $g$ funções reais de variável real definidas por $f(x) = \ln(x^2 - x)$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Então, o domínio de $f \circ g$ é:
(A) $]0, e[$. (B) $]0, 1[$. (C) $[e, e+1]$. (D) $]-1, 1[$. (E) $]1, +\infty[$.
**Obs.:** $f \circ g$ é a lei definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para cada $x$ de seu domínio.

**Questão 04:** Sabendo-se que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, podemos afirmar que:
(A) $a = 1$ e $b = 6$.
(B) $a = 0$ e $b = -6$.
(C) $a = 1$ e $b = -6$.
(D) $a = 0$ e $b = -9$.
(E) não existem $a$ e $b$ tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha todas as raízes da equação dada.

**Questão 05:** Seja a equação $z^4 - a - bi = 0$, onde $a$ e $b$ são reais não nulos. Sobre as raízes desta equação podemos afirmar que:

(A) uma delas é um imaginário puro.
(B) os seus módulos formam uma progressão aritmética de razão $\sqrt[4]{|a+bi|}$.
(C) o seu produto é um imaginário puro.
(D) cada uma tem argumento igual a $\frac{\arg(a+bi)}{4}$.
(E) a sua soma é zero.

**Obs.:** $\arg(a+bi)$ denota o argumento do número $a - bi$.

**Questão 06:** O número natural $n$ tal que $(2i)^n + (1+i)^{2n} = -16i$, onde $i$ é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, vale:

(A) $n = 6$. (B) $n = 3$. (C) $n = 7$. (D) $n = 4$.
(E) Não existe $n$ nestas condições.

**Questão 07:** Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios com coeficientes reais, de graus 2 e 4 respectivamente, tais que $P(i) = 0$ e $Q(i) = 0$, então podemos afirmar que:

(A) $P(x)$ é divisível por $x + 1$.
(B) $P(x)$ é divisível por $x - 1$.
(C) $P(x).Q(x)$ é divisível por $x^4 + 2x^2 + 1$.
(D) $P(x)$ e $Q(x)$ são primos entre si.
(E) $Q(x)$ não é divisível por $P(x)$.

**Obs.:** $i$ é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos.

**Questão 08:** Suponha que os números 2, $x$, $y$ e 1 458 estão, nesta ordem, em progressão geométrica. Desse modo o valor de $x + y$ é:

(A) 90. (B) 100. (C) 180. (D) 360. (E) 1 460.

**Questão 09:** Sejam $a$, $b$ e $c$ constantes reais com $a \neq 0$ formando, nesta ordem, uma progressão aritmética e tais que a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é $-\sqrt{2}$. Então uma relação válida entre $b$ e $c$ é:

(A) $c = \frac{b}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1)$. (B) $c = b(2 - \sqrt{2})$. (C) $c = b(\sqrt{2} - 1)$.
(D) $c = b\sqrt{2}$. (E) $c = \frac{b}{2}(1 - \sqrt{2})$.

**Questão 10:** Seja $\alpha$ um número real, $\alpha > \sqrt{5}$, tal que $(\alpha + 1)^m = 2^p$, onde $m$ é um inteiro positivo maior que 1 e $p = m(\log_2 m)[\log_m(\alpha^2 - 5)]$. O valor de $\alpha$ é:

(A) 3. (B) 5. (C) $\sqrt{37}$. (D) 32.
(E) Não existe apenas um valor de $\alpha$ nestas condições.

**Questão 11:** Considere $A(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 + 4x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Então temos:

(A) $A(x) > 1$, para algum $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$.
(B) $A(x) = 1$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
(C) $A(x) < 1$, apenas para $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1$.
(D) $A(x) > 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1$.
(E) $A(x) < 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

**Questão 12:** Seja $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < -1$. A lei que define a inversa de $f$ é:

(A) $\sqrt{1 + 2^y}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
(B) $-\sqrt{1 + 2^y}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
(C) $1 - \sqrt{1 + 2^y}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
(D) $-\sqrt{1 - 2^y}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y \leq 0$.
(E) $1 + \sqrt{1 + 2^y}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y \leq 0$.

**Questão 13:** Seja $a$ um número real com $0 < a < 1$. Então, os valores reais de $x$ para os quais $a^{2x} - (a + a^2)a^x + a^3 < 0$ são:

(A) $a^2 < x < a$. (B) $x < 1$ ou $x > 2$. (C) $1 < x < 2$.
(D) $a < x < \sqrt{a}$. (E) $0 < x < 4$.

**Questão 14:** No desenvolvimento de $(1+3x)^m$, a razão entre os coeficientes dos termos de terceiro e primeiro graus em $x$ é $6(m - 1)$. O valor de $m$ é:

(A) 3. (B) 4. (C) 6. (D) 8. (E) 10.

**Questão 15:** Considere $P$ um polígono regular de $n$ lados. Suponha que os vértices de $P$ determinem $2n$ triângulos, cujos lados não são lados de $P$. O valor de $n$ é:

(A) 6. (B) 8. (C) 10. (D) 20.
(E) Não existe um polígono regular com esta propriedade.

**Questão 16:** Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}\pi & \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \sec\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \\ \cos\pi & \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$.
Se $a = \det A$ e $b = \det B$ então o número complexo $a + bi$ tem módulo igual a:

(A) 1. (B) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5}$. (C) 4. (D) $2\sqrt{2}$. (E) 0.

**Questão 17:** Seja $A$ uma matriz real que possui inversa. Seja $n$ um número inteiro positivo e $A^n$ o produto da matriz $A$ por ela mesma $n$ vezes. Das afirmações a seguir, a verdadeira é:

(A) $A^n$ possui inversa, qualquer que seja o valor de $n$.
(B) $A^n$ possui inversa apenas quando $n = 1$ ou $n = 2$.
(C) $A^n$ possui inversa e seu determinante independe de $n$.
(D) $A^n$ não possui inversa para valor algum de $n$, $n > 1$.
(E) Dependendo da matriz $A$, a matriz $A^n$ poderá ou não ter inversa.

**Questão 18:** Sobre o sistema $\begin{cases} 8x - y - 2z = 0 \\ 7x + y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ Podemos afirmar que:

(A) é possível e determinado.
(B) é impossível.
(C) é possível e qualquer solução $(x, y, z)$ é tal que os números $x$, $y$ e $z$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão igual a $1$.
(D) é possível e qualquer solução $(x, y, z)$ é tal que $y = \frac{x - z}{3}$.
(E) é possível e qualquer solução $(x, y, z)$ é tal que os números $x$, $y$ e $z$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $\frac{x + y - z}{3}$.

**Questão 19:** A pergunta "Existe $x$ real tal que os números reais $e^x$, $1 + e^x$, $1 - e^x$ são as tangentes dos ângulos internos de um triângulo?" admite a seguinte resposta:

(A) Não existe $x$ real nestas condições.
(B) Todo $x$ real, $x \geq 1$, satisfaz estas condições.
(C) Todo $x$ real, $x \leq -1$, satisfaz estas condições.
(D) Todo $x$ real, $-1 < x < 1$, satisfaz estas condições.
(E) Apenas $x$ inteiro par satisfaz estas condições.

**Questão 20:** O conjunto imagem da função $f : [0, 1] \to [0, \pi]$ definida por $f(x) = \arccos \frac{3x - 1}{2}$ é:

(A) $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right\}$. (B) $[0, \pi]$. (C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. (D) $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. (E) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**Obs.:** o conjunto imagem de uma função $f : A \to B$ é o conjunto $\{y \in B \text{ tal que } y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$.

**Questão 21:** Sobre a equação $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2 \operatorname{sen} 6x$, podemos afirmar que:

(A) apresenta uma raiz no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

(B) apresenta duas raízes no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(C) apresenta uma raiz no intervalo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

(D) apresenta uma raiz no intervalo $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

(E) não apresenta raízes reais.

**Questão 22:** Seja a equação $\operatorname{sen}^3 x \cos x - \operatorname{sen} x \cos^3 x = \frac{1}{m}$, onde $m$ é um número real não nulo. Podemos afirmar que:

(A) a equação admite solução qualquer que seja $m$, $m \neq 0$.
(B) se $|m| < 4$ esta equação não apresenta solução real.
(C) se $m > 1$ esta equação não apresenta solução real.
(D) se $|m| > 2$ esta equação sempre apresenta solução real.
(E) se $m < 4$ esta equação não apresenta solução real.

**Questão 23:** A respeito da solução da equação $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2$, $0 \leq x < 2\pi$, podemos afirmar que:

(A) existe apenas uma solução no primeiro quadrante.
(B) existe apenas uma solução no segundo quadrante.
(C) existe apenas uma solução no terceiro quadrante.
(D) existe apenas uma solução no quarto quadrante.
(E) existem duas soluções no intervalo $0 \leq x < 2\pi$.

**Questão 24:** A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é $2\,160°$. Então o número de diagonais deste polígono, que não passam pelo centro da circunferência que o circunscreve, é:

(A) 50. (B) 60. (C) 70. (D) 80. (E) 90.

**Questão 25:** Num triângulo $ABC$, $m(\overline{BC}) = 4$ cm, o ângulo $\hat{C}$ mede $30°$ e a projeção do lado $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$ mede 2,5 cm. O comprimento da mediana que sai do vértice $A$ mede:

(A) 1 cm. (B) $\sqrt{2}$ cm. (C) 0,9 cm. (D) $\sqrt{3}$ cm. (E) 2 cm.

**Questão 26:** Por um ponto $A$ de uma circunferência, traça-se o segmento $\overline{AA'}$ perpendicular a um diâmetro desta circunferência. Sabendo-se que o ponto $A'$ determina no diâmetro segmentos de 4 cm e 9 cm, podemos afirmar que a medida do segmento $\overline{AA'}$ é:

(A) 4 cm. (B) 12 cm. (C) 13 cm. (D) 6 cm. (E) $\sqrt{13}$ cm.

**Questão 27:** Num losango $ABCD$, a soma das medidas dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se a sua diagonal menor mede $d$ cm então sua aresta medirá:

(A) $\frac{d}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. (B) $\frac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$. (C) $\frac{d}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. (D) $\frac{d}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$. (E) $\frac{d}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}$.

**Questão 28:** Considere as circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero de lado $\ell$. A área da coroa circular formada por estas circunferências é dada por:

(A) $\frac{\pi}{4}\ell^2$. (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}\pi\ell^2$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\ell^2$. (D) $\sqrt{3}\pi\ell^2$. (E) $\frac{\pi}{2}\ell^2$.

**Questão 29:** Num triângulo $ABC$, retângulo em $A$, de vértices $B : (1,1)$ e $C : (3,-2)$, o cateto que contém o ponto $B$ é paralelo à reta de equação $3x - 4y + 2 = 0$. Então, a reta que contém o cateto $\overline{AC}$ é dada por:

(A) $4x + 3y - 6 = 0$. (B) $4x + 3y - 3 = 0$. (C) $3x - 4y + 1 = 0$.
(D) $2x + 5y = 0$. (E) $4x - 3y + 6 = 0$.

**Questão 30:** Sejam $a$, $b$, $c$ e $d$ números reais positivos tais que $A : (0a, 3b)$, $B : (-c, d)$, $C : (c, -d)$ são os vértices de um triângulo equilátero. Então a equação da reta $r$, que é paralela ao lado $\overline{BC}$ e passa pelo incentro do triângulo $ABC$, é dada por:

(A) $3ax + by = c - d$. (B) $dx + cy = 3ad + bc$. (C) $ax + by = 2c - 3d$.
(D) $2dx + 3ay = 4bc$. (E) $dx - 2cy = 9a + 3b$.

**Questão 31:** A equação da reta $t$, tangente à circunferência de raio $r$ no ponto $P$, conforme figura *abaixo*, é dada por:

(A) $x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta = r$. (B) $x \operatorname{sen}\theta - y\cos\theta = -r$. (C) $x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta = -r$.
(D) $x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta = r$. (E) $x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta = -r$.

**Questão 32:** Duas retas, $r$ e $s$, concorrentes no ponto $P : \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, determinam na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Sabendo-se que $r$ é dada pela equação $x - y - 1 = 0$, o valor de $m(\overline{PC}).m(\overline{PD})$ é:

(A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{2}{5}$. (C) $3$. (D) $\frac{1}{2}$. (E) $2$.

**Obs.:** $\overline{RS}$ denota o segmento reto de extremos $R$ e $S$ enquanto que $m(\overline{RS})$ denota o comprimento deste segmento.

**Questão 33:** A geratriz de um cone circular reto forma com o eixo deste cone um ângulo de 45°. Sabendo-se que o perímetro de sua secção meridiana mede 2 cm, podemos afirmar que a área total deste cone vale:

(A) $\frac{\pi}{2}(2\sqrt{2} - 2)$ cm². (B) $\pi(\sqrt{2} - 1)$ cm². (C) $\pi(\sqrt{3} - 1)$ cm².

(D) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1)$ cm². (E) $\pi(\sqrt{5} - 1)$ cm².

**Questão 34:** As arestas laterais de uma pirâmide regular de 12 faces laterais têm comprimento $\ell$. O raio do círculo circunscrito ao polígono da base desta pirâmide mede $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$. Então o volume desta pirâmide vale:

(A) $3\sqrt{2}\ell^3$. (B) $2\ell^3$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell^3$. (D) $\sqrt{2}\ell^3$. (E) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ell^3$.

**Questão 35:** Considere uma pirâmide qualquer de altura $h$ e de base $B$. Traçando-se um plano paralelo à base $B$, cuja distância ao vértice da pirâmide é $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}h$ cm, obtém-se uma secção plana de área $\sqrt{7}$ cm². Então a área da base $B$ da pirâmide vale:

(A) $\sqrt{35}$ cm². (B) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ cm². (C) $\frac{7\sqrt{7}}{5}$ cm². (D) $\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ cm². (E) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ cm².

**Problema 01:** Sejam $A(x)$ e $B(x)$ polinômios de grau maior que um e admita que existam polinômios $C(x)$ e $D(x)$ tais que a igualdade a seguir se verifica: $A(x).C(x) + B(x).D(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Prove que $A(x)$ não é divisível por $B(x)$.

**Problema 02:** Seja o sistema linear em $x$, $y$ e $z$ dado por $\begin{cases} \alpha x + y + 2z = 5 \\ x + \beta y - 3z = -1 \end{cases}$ onde $\alpha$ e $\beta$ são números reais. Analise para que valores de $\alpha$ e $\beta$ este sistema admite mais de uma solução.

**Problema 03:** Seja $A$ uma matriz quadrada inversível, de ordem 3. Seja $B$ a matriz dos cofatores da matriz $A$. Sabendo-se que $\det A = -2$, calcule $\det B$.

**Problema 04:** Considere um cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio 2 cm. Sabendo-se que a área do círculo, limitado pela circunferência formada por pontos de tangência entre as duas superfícies, é $2\pi$ cm$^2$, calcule a altura deste cone.

**Problema 05:** Determine o centro da circunferência, situada no primeiro quadrante, tangente aos eixos coordenados e tangente internamente à circunferência $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

# I.27 Vestibular 1987

**Questão 01:** Considere a função $y = f(x)$ definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$, para cada $x$ real. Sobre esta função, qual das afirmações abaixo é verdadeira.

(A) $y = f(x)$ é uma função par.
(B) $y = f(x)$ é uma função ímpar.
(C) $f(x) > 0$ para todo $x$ real.
(D) $f(x) \leq 0$ para todo $x$ real.
(E) $f(x)$ tem o mesmo sinal de $x$, para todo real $x \neq 0$.

**Questão 02:** Considere $x = g(y)$ a função inversa da seguinte função: $y = f(x) = x^2 - x + 1$, para cada número real $x \geq \frac{1}{2}$. Nestas condições, a função $g$ é assim definida:

(A) $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, para cada $y \geq \frac{3}{4}$.
(B) $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{1}{4}}$, para cada $y \geq \frac{1}{4}$.
(C) $g(y) = \sqrt{y - \frac{3}{4}}$, para cada $y \geq \frac{3}{4}$.
(D) $g(y) = \sqrt{y - \frac{1}{4}}$, para cada $y \geq \frac{1}{4}$.
(E) $g(y) = \frac{3}{4} + \sqrt{y - \frac{1}{2}}$, para cada $y \geq \frac{1}{2}$.

**Questão 03:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que: $f(x) \neq 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $f(x + y) = f(x).f(y)$, para todos $x$ e $y$ em $\mathbb{R}$. Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ uma P.A. de razão $r$, tal que $a_1 = 0$. Então $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4))$

(A) É uma P.A. de razão igual a $f(r)$ e 1º termo $f(a_1) = f(0)$.
(B) É uma P.A. de razão igual a $r$.
(C) É uma P.G. de razão igual a $f(r)$ e 1º termo $f(a_1) = 1$.
(D) É uma P.G. de razão igual a $r$ e 1º termo $f(a_1) = f(0)$.
(E) Não é necessariamente uma P.A. ou uma P.G.

**Questão 04:** Sejam $F$ e $G$ dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta.

(A) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.
(B) Se $F \cap G$ é o conjunto vazio, então necessariamente $F \cup G = \mathbb{R}$.
(C) Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F \cap G = F \cup G$.
(D) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.
(E) Se $F \subset G$ e $G \neq \mathbb{R}$, então $(F \cap G) \cup G = \mathbb{R}$.

**Questão 05:** Multiplicando por 2 as raízes da equação $x^4 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ vamos obter raízes da seguinte equação:

(A) $2y^4 - 6y^2 + 6y - 4 = 0$. (B) $y^3 - 4y^2 + 8y - 8 = 0$. (C) $8y^4 - 8y^2 + 4y - 1 = 0$.
(D) $y^3 - 8y^2 + 8y + 8 = 0$. (E) $4y^3 - 4y^2 - 4y - 8 = 0$.

**Questão 06:** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, seja $L$ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem a seguinte condição: a distância de $P(x, y)$ ao ponto $Q(6, 0)$ é igual à distância do ponto $P(x, y)$ ao eixo das ordenadas. Nestas condições $L$ é:

(A) uma parábola de equação $y^2 = 6x$.
(B) uma elipse de equação $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.
(C) um quadrado.
(D) uma hipérbole de equação $3x^2 - 2y^2 = \sqrt{6}$.
(E) uma parábola de equação $y^2 - 12x + 36 = 0$.

**Questão 07:** Seja $S$ a coleção de todos os números complexos $z$, que são raízes da equação $|z| - z = 1 + 2i$, onde $i$ é a unidade imaginária. Então, podemos garantir que:

(A) $S = \left\{\frac{3}{2} - 2i\right\}$.
(B) $S = \left\{\frac{1}{2} + 2i, -\frac{1}{2} - 2i\right\}$.
(C) $S = \left\{\frac{1}{2} + 4K\pi i; K = 1, 2, 3\right\}$.
(D) $S = \left\{\frac{1}{4} + 3i\right\}$.
(E) $S = \{1 + 2Ki; K = 1, 2, 3\}$.

**Questão 08:** A soma de todas as raízes da equação $z^3 - 1 = 0$ é

(A) 1. (B) 2. (C) zero. (D) $-2\sqrt{2}i$. (E) $2 + \sqrt{3}i$.

**Questão 09:** Seja $N$ o número de soluções reais da equação $\operatorname{sen} x = |2 + 3i|$. Então, temos:

(A) $N > 50$. (B) $N$ = zero. (C) $N = 2$. (D) $N = 1$. (E) $N > 2$ e $N < 10$.

**Questão 10:** Considerando $z$ e $w$ números complexos arbitrários e $u = z.w + \bar{z}.\bar{w}$, então o conjugado de $u$ será necessariamente:

(A) igual a $|z|.|w|$.
(B) um número imaginário puro.
(C) igual ao dobro da parte real de $z + w$.
(D) igual ao dobro da parte real do número $z.w$.
(E) diferente de $u$.

**Questão 11:** Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar, empregando os caracteres 1, 3, 5, 6, 8 e 9?
(A) 60. (B) 120. (C) 240. (D) 40. (E) 80.

**Questão 12:** O número de arranjos de $n+2$ objetos tomados cinco a cinco vale $180n$. Nestas condições, concluímos que:
(A) $n$ é um número ímpar.
(B) $n$ é um número primo.
(C) $n$ está compreendido entre 100 e 200.
(D) $n$ é um número par.
(E) $n$ é divisível por 5.

**Questão 13:** No desenvolvimento de $(x^2+3x)^{12}$, o coeficiente de $x^{20}$ é:
(A) $3^4 \times 55$. (B) $3^5 \times 110$. (C) $3^6 \times 55$. (D) $3 \times 110$. (E) 55.

**Questão 14:** Acrescentando 16 unidades a um número, seu logaritmo na base 3 aumenta de 2 unidades. Esse número é:
(A) 5. (B) 8. (C) 2. (D) 4. (E) 3.

**Questão 15:** Considere $u = x.\ln(3)$, $v = x.\ln(2)$ e $e^u.e^v = 36$. Nestas condições, temos:
(A) $x = -4$. (B) $x = 12$. (C) $x = -3$. (D) $x = 9$. (E) $x = 2$.

**Questão 16:** Se $x$ e $y$ são números reais e $\ln\left[(y^2+1).e^x\right] - \ln(y^2+1)^4 = x-3$ então:
(A) $y = 1+\sqrt{e-1}$. (B) $y = 10-\sqrt{e-1}$. (C) $y = \pm\sqrt{e-1}$.
(D) $y = \pm\sqrt{e+1}$. (E) $y = \frac{1}{2}\sqrt{e-1}$.

**Questão 17:** Suponha que $x$ e $y$ são números reais. satisfazendo simultaneamente as equações $2x+3y=21$ e $7x-4y=1$. Nestas condições, se $S = x+y$, então
(A) $S = 10$. (B) $S = 8$. (C) $S = 5$. (D) $S = -8$. (E) $S = 15$.

**Questão 18:** Considere $P$ a matriz inversa da matriz $M$, onde $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$.
A soma dos elementos da diagonal principal da matriz $P$ é
(A) $\frac{9}{1}$. (B) $\frac{4}{9}$. (C) 4. (D) $\frac{5}{9}$. (E) $-\frac{1}{9}$.

**Questão 19:** Sejam $\lambda$ um número real, $I$ a matriz identidade de ordem 2 e $A$ a matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos $a_{ij}$ são definidos por: $a_{ij} = i + j$. Sobre a equação em $\lambda$ definida por $\det(A - \lambda I) = \det A - \lambda$, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) Apresenta apenas raízes negativas.
(B) Apresenta apenas raízes inteiras.
(C) Uma raiz é nula e a outra negativa.
(D) As raízes são 0 e $\frac{5}{2}$.
(E) Todo $\lambda$ real satisfaz esta equação.

**Questão 20:** Quaisquer que sejam os números reais $a$, $b$ e $c$, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{bmatrix}$ é dado por

(A) $ab + ac + bc$. (B) $abc$. (C) zero. (D) $abc + 1$. (E) 1.

**Questão 21:** Seja $P$ o determinante da seguinte matriz real: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 & x \\ 2 & 3 & 1 & x^2 \\ 4 & 9 & 8 & x^4 \end{bmatrix}$

Para se obter $P < 0$ é suficiente considerar $x \in \mathbb{R}$, tal que:

(A) $x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$. (B) $10 < x < 11$. (C) $\sqrt{3} < x < 2$.
(D) $2 < x < 3$. (E) $9 < x < 10$.

**Questão 22:** O número de raízes reais da equação $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x + \operatorname{sen}^8 x + \operatorname{sen}^{10} x = 5$ é:

(A) um número maior do que 12. (B) zero. (C) 2. (D) 10. (E) 1.

**Questão 23:** O valor de $x > 0$ que satisfaz a equação $\sqrt{x - 1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ é

(A) $x = 4\sqrt{3}$. (B) $x = 5 - 4\sqrt{3}$. (C) $x = 7 - \sqrt{3}$.
(D) $x = 7 - 4\sqrt{3}$. (E) $x = 9 - 4\sqrt{3}$.

**Questão 24:** Se $\cos^4 4x - \operatorname{sen}^4 4x = a \neq 0$, então $\cos 8x$ vale:

(A) $2a$. (B) $a$. (C) $4a$. (D) zero. (E) $a + 4$.

**Questão 25:** Seja $a$ um número real não nulo, satisfazendo $-1 \leq a \leq 1$. Se dois ângulos agudos em um triângulo são dados por $\operatorname{arc\,sen}\, a$ e $\operatorname{arc\,sec}\, \frac{1}{a}$, então o seno trigonométrico do terceiro ângulo desse triângulo é igual a

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) 1. (E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Questão 26:** O perímetro de um triângulo retângulo isósceles é $2p$. Nesse triângulo, a altura relativa à hipotenusa é:

(A) $p\sqrt{2}$. (B) $(p+1)(\sqrt{3}-1)$. (C) $p(\sqrt{2}-1)$.
(D) $4p(\sqrt{2}+1)$. (E) $8p(\sqrt{2}+4)$.

**Questão 27:** Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.
(B) Um ponto e uma reta determinam um plano.
(C) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.
(D) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.
(E) Se $\alpha$ é o plano determinado por duas retas concorrentes $r$ e $s$, então toda reta $m$ desse plano, que é paralela a $r$, não será paralela à reta $s$.

**Questão 28:** Se um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices, então o número de arestas deste poliedro é

(A) 12. (B) 18. (C) 28. (D) 30. (E) 32.

**Questão 29:** Suponha que $I$ é um cubo, tal que a medida de sua diagonal é $a$ cm e admita que $II$ é um cubo, cujo volume é o triplo do volume de $I$. Designando por $x$ a medida da diagonal de $II$, concluímos que:

(A) $x = a\sqrt{2}$ cm. (B) $x = a(1+\sqrt{2})$ cm. (C) $x = a\sqrt{3}$ cm.
(D) $x = a\sqrt{3}$ cm. (E) $x = \sqrt[3]{3a}$ cm.

**Questão 30:** Seja $T$ um cubo com aresta de medida $a$. Considere $P$ a pirâmide que tem vértice no centro de uma face de $T$ e como base a face oposta de $T$. Sendo $x$ a área lateral de $P$, temos:

(A) $x = a^2.\sqrt{3}$. (B) $x = a^2.\sqrt{5}$. (C) $x = (a+1)^2.\sqrt{5}$.
(D) $x = (a+1)^2.\sqrt{3}$. (E) $x = (\sqrt{3}+\sqrt{5})a^2$.

**Questão 31:** Seja $P$ um paralelepípedo retângulo de dimensões dadas por três números consecutivos. Se a área total de $P$ é 10 m$^2$, então seu volume é:

(A) $\sqrt{3}$ m$^3$. (B) $\sqrt{5}$ m$^3$. (C) $\sqrt{7}$ m$^3$. (D) $\sqrt{2}$ m$^3$. (E) $2\sqrt{3}$ m$^3$.

**Questão 32:** Considere $P$ um prisma reto de base quadrada, cuja altura mede 3 m e tem área total de 80 m$^2$. O lado dessa base quadrada mede:
(A) 1 m. (B) 8 m. (C) 4 m. (D) 6 m. (E) 16 m.

**Questão 33:** A área lateral de um cilindro de revolução, de $x$ metros de altura, é igual à área de sua base. O volume deste cilindro é:
(A) $2\pi x^3$ m$^3$. (B) $4\pi x^3$ m$^3$. (C) $\pi\sqrt{2}x^3$ m$^3$. (D) $\pi\sqrt{3}x^3$ m$^3$. (E) $6\pi x^3$ m$^3$.

**Questão 34:** O desenvolvimento da superfície lateral de um cone reto é um setor circular de raio $a$ e ângulo central igual a $60°$. O volume deste cone é:
(A) $\frac{a^3}{6}\pi$. (B) $\pi\sqrt{35}a^3$. (C) $\frac{1}{3}\pi a^3$. (D) $\pi\left(\frac{a}{6}\right)^3$. (E) $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{6}\right)^3\sqrt{35}$.

**Questão 35:** A razão entre o volume de uma esfera de raio $R$ e o volume de um cubo nela inscrito é:
(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$. (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) $2\pi$. (D) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$. (E) $\pi\sqrt{3}$.

**Problema 01:** Uma circunferência, tangente às retas de equações $2x - 3y + 9 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$, tem o seu centro sobre a reta $x + 2y - 10 = 0$. Encontre a equação dessa circunferência.

**Problema 02:** Considere $Q(x)$ e $R(x)$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de um polinômio $A(x)$ pelo trinômio $B(x) = -x^2 + 5x - 6$. Admita que o grau de $A(x)$ é quatro e que os restos da divisão de $A(x)$ por $x + 1$ e $x - 2$ são, respectivamente, 3 e $-1$. Supondo também que $Q(x)$ é divisível por $x + 1$, obtenha $R(x)$.

**Problema 03:** Suponha $x$ e $y$ números reais, tais que: $\begin{cases} \lg(x - y) = \sqrt{3} \\ (\lg x)(\lg y) = 1 \end{cases}$.
Calcule o módulo do número $S = \lg x + \lg y$.

**Problema 04:** Considere um trapézio isósceles de altura igual à base menor e de base maior igual ao triplo da menor. Sendo $\ell$ a medida de cada um dos lados não paralelos, calcule o volume e a área do sólido gerado pela rotação completa desse trapézio em torno de sua base maior.

**Problema 05:** Supondo $m$ uma constante real, $0 < m < 1$, encontre todos os números reais $x$, que satisfazem a inequação $\log_m(x^4 + m^4) \geq 2 + \log_m\left[\left(\frac{x}{2m}\right)^2 + m^2\right]$.

## I.28 Vestibular 1986

**Questão 01:** Consideremos as seguintes afirmações sobre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

I. Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq f(-x)$ então $f$ não é par;

II. Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(-x) = -f(-x)$ então $f$ é impar;

III. Se $f$ é par e ímpar então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$;

IV. Se $f$ é ímpar então $f \circ f$ ($f$ composta com $f$) é ímpar.

Podemos afirmar que estão corretas as afirmações de números

(A) I e IV. (B) I, II e IV. (C) I e III. (D) III e IV. (E) I, II e III.

**Questão 02:** Sejam $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, e $f$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\left(a^{x^2} - a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos 2\pi x + 4\cos \pi x + 3}$$

Sobre o domínio $A$ desta função podemos afirmar que

(A) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cap \mathbb{Z} \subset A$. (B) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}$. (C) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \subset A$.
(D) $\{x \in \mathbb{R} : X \notin \mathbb{Z} \text{ e } x \geq \sqrt{2}\} \subset A$. (E) $A \subset [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

**Questão 03:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a seguinte propriedade: $f(x - y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Se $g(x) = f(\log_{10}(x^2 + 1)^2)$ então podemos afirmar que

(A) O domínio de $g$ é $\mathbb{R}$ e $g(0) = f(1)$.
(B) $g$ não está definida para os reais negativos e $g(x) = 2f(\log_{10}(x^2 + 1))$, para $x \geq 0$.
(C) $g(0) = 0$ e $g(x) = 2f(\log_{10}(x^2 + 1))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(D) $g(0) = f(0)$ e $g$ é injetora.
(E) $g(0) = -1$ e $g(x) = [f(\log_{10}(x^2 + 1)^{-1})]^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Questão 04:** Sejam os números reais $x > 0$, $\alpha > 3 > 1$. Os três números reais $x$, $\sqrt{x \log_\alpha \beta}$, $\log_\alpha(\beta x)$ são, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica infinita. A soma $S$ desta progressão vale:

(A) $S = \dfrac{2x}{1 - \log_\alpha \beta}$. (B) $S = \dfrac{x + 1}{1 - \frac{1}{2}\log_\alpha \beta}$. (C) $S = \dfrac{1}{1 - \sqrt{\log_\alpha \beta}}$.

(D) $S = \dfrac{1}{1 + \sqrt{\log_\alpha \beta}}$. (E) impossível determinar $S$ pois este valor não é finito.

**Questão 05:** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais sejam $A(0,a)$, $B\left(\frac{a}{2},0\right)$, $C(0,2a)$ pontos dados onde $a$ é um número real, $a<0$. Sejam as retas: $r$ passando por $A$ e $B$ e $s$ passando por $C$ e paralela a $r$. A área do trapézio $T$ delimitado pelos eixos cartesianos e pelas retas $r$ e $s$ vale

(A) $3a^2$. (B) $\frac{3a^2}{4}$. (C) $\frac{3a^2}{2}$. (D) $\sqrt{3}a^2$. (E) $\frac{3a^2}{4}-a^2$.

**Questão 06:** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais considere o triângulo $ABC$, sobre o qual sabemos que:

- o lado $\overline{AC}$ está sobre a reta $y=x$;
- o vértice $A$ tem coordenadas $(1,1)$ e o ângulo $\hat{A}$ mede $60°$;
- o vértice $B$ está no eixo das ordenadas;
- o lado $\overline{BC}$ é paralelo ao eixo das abscissas.

A área deste triângulo vale:

(A) 9. (B) $\frac{9}{2}+3\sqrt{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{9}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$. (E) $\frac{1}{2}+5\sqrt{3}$.

**Questão 07:** Sejam $a$, $b$ e $c$ números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma 12. Sabendo-se que os restos das divisões de $x^{10}+8x^8+ax^5+bx^4+cx$ por $x-2$ e $x+2$ são iguais, então a razão desta progressão aritmética é:

(A) 1. (B) $\frac{28}{5}$. (C) $\frac{37}{5}$. (D) $\frac{11}{15}$. (E) $-3$.

**Questão 08:** os valores de $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+K\pi$, $K\in\mathbb{Z}$ e de $n\in\mathbb{N}$ para os quais a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(\sec x-\operatorname{tg}x)^{n-i}\frac{1}{(\sec x-\operatorname{tg}x)^i}=\frac{255}{(\sec x-\operatorname{tg}x)^n}$$

se verifica são:

(A) $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ e $n=5$.

(B) $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+K\pi$, $K\in\mathbb{Z}$ e $\forall n\in\mathbb{N}$.

(C) $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+K\pi$, $x\neq\frac{\pi}{4}+K\pi$, $K\in\mathbb{Z}$ e $n=6$.

(D) $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+K\pi$, $K\in\mathbb{Z}$ e $n=8$.

(E) Não existe $n\in\mathbb{N}$ tal que a igualdade seja verdadeira.

**Obs.:** $\binom{n}{i}$ = combinação de $n$ elementos tomados $i$ a $i$.

**Questão 09:** Seja $K$ uma constante real e considere a equação em $x$

$$\text{arc sen}\,\frac{1+x^2}{2x} = K, \text{ sendo } x \neq 0$$

Então podemos afirmar que:

(A) Para cada $K \in \mathbb{R}$, a equação admite uma única solução.
(B) Para cada $K \in \mathbb{R}$, a equação admite duas soluções.
(C) Existe $K \in \mathbb{R}$ tal que a equação admite uma infinidade de soluções.
(D) Não existe $K \in \mathbb{R}$ tal que a equação admita solução.
(E) Existe $K \in \mathbb{R}$ tal que a equação admite uma única solução.

**Questão 10:** Considere um prisma hexagonal regular tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral $\ell$ é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Sabendo-se que se a aresta da base for aumentada de 2 cm, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm$^3$ considerando que a aresta lateral permanece a mesma, podemos afirmar que o volume do prisma é:

(A) 10 cm$^3$. (B) 12 cm$^3$. (C) $\frac{3}{2}$ cm$^3$. (D) 36 cm$^3$. (E) $\frac{27}{2}$ cm$^3$.

**Questão 11:** Um cilindro equilátero de raio 3 cm está inscrito num prisma triangular reto, cujas arestas da base estão em progressão aritmética de razão $s$, $s > 0$. Sabendo-se que a razão entre os volumes do cilindro e do prisma é $\frac{\pi}{4}$ podemos afirmar que a área lateral do prisma vale:

(A) 144 cm$^2$.
(B) $12\pi$ cm$^2$.
(C) 24 cm$^2$.
(D) $\frac{\pi}{5}$ da área lateral do cilindro.
(E) $\frac{5}{3}$ da área lateral do cilindro.

**Questão 12:** Sejam $a, b, c$ números reais dados com $a < 0$. Suponha que $x_1$ e $x_2$ sejam as raízes da função $y = ax^2 + bx + c$ e $x_1 < x_2$. Sejam $x_3 = \frac{-b}{2a}$ e $x_4 = -\frac{2b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$. Sobre o sinal de $y$ podemos afirmar que:

(A) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_1 < x < x_4$.
(B) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_4 < x < x_2$.
(C) $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_1 < x < x_4$.
(D) $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > x_4$.
(E) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < x_3$.

**Questão 13:** No conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos seja $a$ tal que $|a| < 1$. O lugar geométrico dos pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem a igualdade $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = 1$ é:

(A) Uma circunferência de centro na origem e raio 1.
(B) Uma hipérbole.
(C) Uma elipse de semi-eixo maior igual a 2.
(D) Uma parábola.
(E) Formado por duas retas concorrentes.

**Obs.:** A notação $\overline{a}$ é usada para denotar o conjugado complexo de $a$.

**Questão 14:** Seja $x \in \mathbb{R}$ e $A$ a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se $S$ é o conjunto dos $x$ tais que $A$ é uma matriz inversível, então podemos afirmar que:

(A) $S$ é vazio. (B) $S = \left\{K\frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}\right\}$. (C) $S = [0, 2\pi]$.
(D) $S = \{K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$. (E) $S = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

**Questão 15:** Dizemos que duas matrizes reais, $2 \times 1$, $A$ e $B$ quaisquer são linearmente dependentes, se e somente se existem dois números reais $x$ e $y$ não ambos nulos tais que $xA + yB = 0$, onde 0 é a matriz nula $2 \times 1$. Se $A = \begin{bmatrix} 1 \\ K^n - 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} K^{-n} + 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ onde $K \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ podemos afirmar que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

(A) $A$ e $B$ são linearmente dependentes, $\forall K \in \mathbb{R}^*$.
(B) existe um único $K \in \mathbb{R}^*$ tal que $A$ e $B$ não são linearmente dependentes.
(C) existe um único $K \in \mathbb{R}^*$ tal que $A$ e $B$ são linearmente dependentes.
(D) existem apenas dois valores de $K \in \mathbb{R}^*$ tais que $A$ e $B$ são linearmente dependentes.
(E) não existe valor de $K \in \mathbb{R}^*$ tal que $A$ e $B$ sejam linearmente dependentes.

## I.29 Vestibular 1985

**Questão 01:** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere a família de circunferências que passam pelo ponto $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ e que são tangenciadas pela reta $y = -\frac{3}{2}$. Então, a equação do lugar geométrico dos centros dessas circunferências é dada por:

(A) $x^2 - 4x - 2y + 2 = 0$. (B) $y^2 - 2y - 5x - 2 = 0$. (C) $x^2 + 2x - 7y + 3 = 0$.
(D) $y^2 - 4y - 2x - 3 = 0$. (E) $x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$.

**Questão 02:** Considere um triângulo isósceles inscrito em uma circunferência. Se a base e a altura deste triângulo medem 8 cm, então o raio desta circunferência mede:

(A) 3 cm. (B) 4 cm. (C) 5 cm. (D) 6 cm. (E) $3\sqrt{2}$ cm.

**Questão 03:** Um tronco de cone reto com bases paralelas está inscrito em uma esfera cujo raio mede 2 m. Se os raios das bases do tronco de cone medirem, respectivamente, $r$ m e $2r$ m, então o seu volume medirá:

(A) $\frac{2}{3}\pi r^2\left(\sqrt{4-r^2} - \sqrt{1-r^2}\right)$. (B) $\frac{3}{2}\pi r^2\left(\sqrt{4-r^2} + \sqrt{1-r^2}\right)$.
(C) $\frac{7}{3}\pi r^2\left(\sqrt{4-r^2} - 2\sqrt{1-r^2}\right)$. (D) $\frac{7}{3}\pi r^2\left(\sqrt{4-r^2} + 2\sqrt{1-r^2}\right)$.
(E) $\frac{3}{2}\pi r^2\left(\sqrt{4-r^2} + 2\sqrt{1-r^2}\right)$.

**Questão 04:** Num triângulo $ABC$ considere conhecidos os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{B}A$ e a medida $d$ do lado $\overline{AB}$. Nestas condições, a área $S$ deste triângulo é dada pela relação:

(A) $S = \dfrac{d^2}{2\,\mathrm{sen}(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$. (B) $S = \dfrac{d^2(\mathrm{sen}\, B\hat{A}C)(\mathrm{sen}\, C\hat{B}A)}{2\,\mathrm{sen}(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$.
(C) $S = \dfrac{d^2 \mathrm{sen}\, C\hat{B}A}{2\,\mathrm{sen}(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$. (D) $S = \dfrac{d^2 \mathrm{sen}\, B\hat{A}C}{2\cos(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$.
(E) $S = \dfrac{d^2(\mathrm{sen}\, B\hat{A}C)(\mathrm{sen}\, C\hat{B}A)}{2\cos(B\hat{A}C + C\hat{B}A)}$.

**Questão 05:** Sejam $X$ um conjunto não-vazio; $A$ e $B$ dois subconjuntos de $X$. Definimos $A^C = \{x \in X \text{ tal que } x \notin A\}$ e $A - B = \{x \in A \text{ tal que } x \notin B\}$. Dadas as senteças:

I. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^C \Leftrightarrow B \subset A^C$, onde "$\Leftrightarrow$" significa "equivalente" e $\emptyset$ o conjunto vazio;

II. Se $X = \mathbb{R}$; $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^3 - 1 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 - 1 = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x - 1 = 0\}$, então $A = C = B$;

III. $A - \emptyset = A$ e $A - B = A - (A \cap B)$;

IV. $A - B \neq A \cap B^C$,

podemos afirmar que está (estão) correta(s):

(A) As sentenças I e III.
(B) As sentenças I, II e IV.
(C) As sentenças III e IV.
(D) As sentenças II, III e IV.
(E) Apenas a sentença II.

**Questão 06:** Uma esfera de raio $r = \sqrt{3}$ cm está inscrita num prisma hexagonal regular que, por sua vez, está inscrito numa esfera de raio $R$. Pode-se afirmar que a medida do raio $R$ vale:

(A) $\sqrt{7}$ cm. (B) $\sqrt{\frac{7}{3}}$ cm. (C) $2\sqrt{3}$ cm. (D) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm. (E) $4\sqrt{3}$ cm.

**Questão 07:** Dada a equação $3^{2x} + 5^{2x} - 15^x = 0$ podemos afirmar que:

(A) Não existe $x$ real que a satisfaça.
(B) $x = \log_3 5$ é solução desta equação.
(C) $x = \log_5 3$ é solução desta equação.
(D) $x = \log_3 15$ é solução desta equação.
(E) $x = 3\log_5 15$ é solução desta equação.

**Questão 08:** Sabendo-se que a equação $ax^4 + bx^3 + 5x + 3 = 0$ é recíproca e tem o 1 como raiz, o produto das raízes reais desta equação é:

(A) 2. (B) $-1$. (C) 1. (D) 3. (E) 4.

**Questão 09:** Dadas as sentenças:

I. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ duas funções satisfazendo $(g \circ f)(x) = x$, para todo $x \in X$. Então $f$ é injetiva, mas $g$ não é necessariamente sobrejetiva;

II. Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva. Então, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$, onde $A$ e $B$ são dois subconjuntos de $X$;

III. Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva. Então, para cada subconjunto $A$ de $X$, $f(A^C) \subset (f(A))^C$ onde $A^C = \{x \in X / x \notin A\}$ e $(f(A))^C = \{x \in Y / x \notin f(A)\}$,

podemos afirmar que está (estão) correta(s):

(A) As sentenças I e II.
(B) As sentenças II e III.
(C) Apenas a sentença I.
(D) As sentenças I e III.
(E) Todas as sentenças.

**Questão 10:** Considere as seguintes funções: $f(x) = x - \frac{7}{2}$ e $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ definidas para todo $x$ real. Então, a respeito da solução da inequação $|(g \circ f)(x)| > (g \circ f)(x)$, podemos afirmar que:

(A) Nenhum valor de $x$ real é solução.
(B) Se $x < 3$ então $x$ é solução.
(C) Se $x > \frac{7}{2}$ então $x$ é solução.
(D) Se $x > 4$ então $x$ é solução.
(E) Se $3 < x < 4$ então $x$ é solução.

**Questão 11:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$ para todos $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é uma progressão aritmética de razão $d$, então podemos dizer que $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_n))$

(A) É uma progressão aritmética de razão $d$.
(B) É uma progressão aritmética de razão $f(d)$ cujo primeiro termo é $a_1$.
(C) É uma progressão geométrica de razão $f(d)$.
(D) É uma progressão aritmética de razão $f(d)$.
(E) Nada se pode afirmar.

**Questão 12:** Dizemos que um número real $\lambda$ é autovalor de uma matriz real $T_{n\times n}$ quando existir uma matriz coluna $X_{n\times 1}$ não-nula, tal que $TX = \lambda X$. Considere uma matriz real $P_{n\times n}$ satisfazendo $PP = P$. Denote por $\lambda_1$ um autovalor de $P$ e por $\lambda_2$ um autovalor de $PP$. Podemos afirmar que, necessariamente:

(A) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.
(B) $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$.
(C) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$.
(D) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ pertencem ao conjunto $\{t \in \mathbb{R} \text{ tal que } t < 0 \text{ ou } t > 1\}$.
(E) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ pertencem ao intervalo aberto $(0, 1)$.

**Questão 13:** Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 0 & x_1 & 1 \\ x_3 & -x_2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_3 \end{pmatrix}$ onde $x_1$, $x_2$ e $x_3$ são raízes da seguinte equação em $x$: $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$. Se $\det A = 4x_1$ e $\det(A - B) = 8$, então podemos afirmar que:

(A) $\det(A-B) = b$ e $a = 2$. (B) $\det A = b$ e $a = 2$. (C) $\det B = 2$ e $b = 5$.
(D) $\det(A-B) = a$ e $b = \det A$. (E) $\det A = \dfrac{a}{2}$ e $b = \dfrac{a}{2}$.

**Questão 14:** Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos e $P_n = a_1 a_2 \ldots a_n$. Se $p > 0$ é uma constante real tal que $P_n = \dfrac{p^{n^2+n}}{2^n}$, então podemos afirmar que os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nesta ordem:

(A) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p$ e $a_n = \dfrac{p^{2n}}{2}$.
(B) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p$ e $a_n = \dfrac{p^n}{2}$.
(C) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p^2$ e $a_n = \dfrac{p^n}{2}$.
(D) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p^2$ e $a_n = \dfrac{p^{2n}}{2}$.
(E) Não formam uma progressão geométrica.

**Questão 15:** Seja $a$ um número real. Os valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem $\left(\dfrac{a + z^{10}}{1+i}\right)\left(\dfrac{a + (\bar{z})^{10}}{1-i}\right) \in \mathbb{R}$ são:

(A) $z = -a + i\sqrt[10]{|a|}$.
(B) Não é possível determiná-los.
(C) $z = -i\sqrt[10]{|a|}$.
(D) Não existe $z \in \mathbb{C}$ tal que isto aconteça.
(E) Todo $z \in \mathbb{C}$.

## I.30 Vestibular 1984

**Questão 01:** Sejam as afirmações:

I. Por um ponto passa uma única reta;

II. Um ponto e uma reta determinam um plano;

III. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano então a reta está contida nesse plano;

IV. Por um ponto situado fora de um reta, existe uma reta paralela à reta dada.

Podemos garantir que:

(A) apenas III é verdadeira.
(B) I e II são falsas.
(C) apenas I é falsa.
(D) apenas II e III são verdadeiras.
(E) apenas II e IV são verdadeiras.

**Questão 02:** Os coeficientes do trinômio $x^2+bx+c$ constituem, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão não nula $r = \frac{q}{2}$ onde $q$ é a razão da progressão aritmética $b^2 - 1$, $c^2 - b^2$. Nestas condições podemos afirmar que o trinômio apresenta:

(A) uma raiz nula.
(B) duas raízes reais distintas.
(C) duas raízes iguais.
(D) duas raízes complexas.
(E) nenhuma raiz.

**Questão 03:** Sejam $P, Q, R$, matrizes reais quadradas arbitrárias de ordem $n$. Considere as seguintes afirmações:

I. se $PQ = PR$ então $Q = R$;

II. Se $P^3$ é a matriz nula então o determinante de $P$ é zero;

III. $PQ = QP$.

Podemos garantir que:

(A) I é a única afirmação verdadeira.
(B) II e III são afirmações verdadeiras.
(C) I e II são afirmações verdadeiras
(D) III é a única afirmação falsa.
(E) I e III são afirmações falsas.

**Questão 04:** Seja $f(x) = e^{\sqrt{x^2-4}}$ onde $x \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais. Um subconjunto $D$ de $\mathbb{R}$ tal que $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função injetora é:

(A) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \text{ e } x \leq -2\}$.
(B) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2\}$.
(C) $D = \mathbb{R}$.
(D) $D = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$.
(E) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$.

**Questão 05:** A equação da circunferência tangente ao eixo das abscissas na origem e que passa pelo ponto $(a, b)$, onde $a^2 + = b^2 = 2b$ e $b \neq 0$, é:

(A) $(x - b)^2 + y^2 = b^2$.
(B) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
(C) $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 2$.
(D) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.
(E) $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

**Questão 06:** Sendo $z = \cos\left[\operatorname{arc\,tg}(a^2 + b^2) + \operatorname{arc\,cotg}(a^2 + b^2)\right]$, podemos afirmar que:

(A) $z = 0$. (B) $z = 1$. (C) $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
(D) $z = \cos(a^2 + b^2)$, se $a^2 + b^2 \leq 1$.
(E) é impossível determinar o valor de $z$.

**Questão 07:** Sabendo-se que $n$ é um número natural tal que $\frac{(\sqrt{3} + i)^n}{3i}$ é um número real, podemos afirmar que:

(A) $n = 6k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$
(B) $n = 3(2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
(C) $n = 3k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
(D) $n = k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$
(E) não existe valor de $n$ natural tal que o número dado seja real.

**Questão 08:** O lugar geométrico da intersecção de duas retas, uma passando pelo ponto $(0, -1)$ com coeficiente angular $a_1$, a outra passando pelo ponto $(0, 1)$ com coeficiente angular $a_2$, tal que $a_1^2 + a_2^2 = 2$, é:

(A) $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = 1$. (B) $x^2 - y^2 = 1$. (C) $x^2 + y^2 = 1$.
(D) $y = a_1 x^2$. (E) $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$.

**Questão 09:** Num triângulo isósceles a razão entre a altura referente à base e esta é $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Sobre o ângulo $\alpha$ oposto à base, podemos afirmar que:

(A) $\alpha = \frac{\pi}{4}$. (B) $\alpha = \frac{\pi}{2}$. (C) $\alpha = \frac{\pi}{3}$. (D) $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
(E) não temos dados suficientes para determiná-lo.

**Questão 10:** Sabendo-se que $z_1 = i$, $z_2$ e $z_3$ são as raízes da equação $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, onde $a, b, c$ são reais não nulos, podemos afirmar que:
(A) $z_1$, $z_2$ e $z_3$ são imaginários puros.
(B) $z_2$ e $z_3$ são reais.
(C) $z_1 z_2 z_3 = c$.
(D) $z_1 + z_2 + z_3 = a$.
(E) pelo menos uma das raízes é real.

**Questão 11:** Os valores de $a$ e $k$ reais que tornam verdadeira a expressão

$$\log_a 2a + \frac{\log_{2a} k}{\log_{6a} k} \log_a^2 2a = (\log_a 2a)(\log_a 3)$$

são:
(A) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e qualquer valor de $k$, $k > 0$.
(B) $a = 2$ e qualquer valor de $k$, $k > 0$, $k \neq 1$.
(C) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e qualquer valor de $k$, $k > 0$, $k \neq 1$.
(D) quaisquer valores de $a$ e $k$, com $k \neq 6a$.
(E) qualquer valor de $a$ positivo com $a \neq 1$ e $a \neq \frac{1}{6}$ e qualquer valor positivo de $k$,

**Questão 12:** Os valores reais de $a$ que tornam o sistema

$$\begin{cases} 3^{2a+1}.x + y = 1 \\ x + y = 0 \\ (3^a.10 - 3).x + y = 1 \end{cases}$$

possível e determinado são:
(A) qualquer valor de $a$.
(B) apenas $a = 0$ e $a = 3$.
(C) apenas $a = 2$.
(D) apenas $a = 1$ e $a = -1$.
(E) não existe valor de $a$ nestas condições.

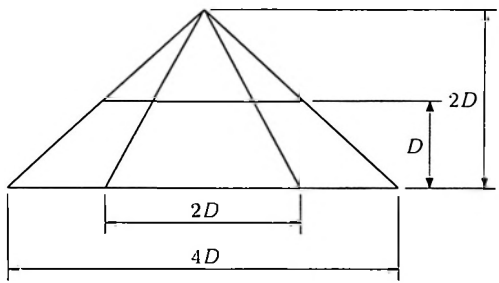
**Questão 13:** O valor de $m$ tal que $\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 2^p = 729$ é:

(A) 14. (B) 9. (C) 6. (D) 7. (E) 8.

**Questão 14:** Possuo um "laser" de alta potência como ferramenta de corte e uma peça plana de forma parabólica que desejo cortar. Suponha que a peça definida por $x_2 - y - 1 \leq 0$ e $y \leq 1$ esteja no plano $x\,O\,y$ e que o "laser", colocado $x\,O\,z$, tem a janela de saída da luz fixa no ponto $(0, 0, 1)$ podendo o seu tubo girar no plano $x\,O\,z$. A partir do início do corte, na borda da peça, de quantos graus devo girar o "laser" para terminar o serviço?
**Obs.:** Os eixos $Ox$, $Oy$ e $Oz$ são ortogonais entre si.

(A) $\pi$. (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{3\pi}{2}$. (E) $\frac{\pi}{3}$.

**Questão 15:** A figura abaixo é a secção de dois cones retos cortados por um plano paralelo às bases. O volume da região hachurada é:




(A) $\frac{5}{6}\pi D^3$. (B) $\frac{7}{12}\pi D^3$. (C) $\frac{1}{3}\pi D^3$. (D) $\pi D^3$. (E) $2\pi D^3$.

## I.31 Vestibular 1983

**Questão 01:** Ao girarmos o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \in [0,1] \\ \sqrt{2x - x^2}; & x \in (1,2] \end{cases}$$

em torno do eixo das abscissas (eixo dos $x$), obtemos uma superfície de revolução cujo volume é:

(A) $\frac{\pi}{3}$. (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) $\pi$. (D) $2\pi$. (E) $3\pi$.

**Questão 02:** Um general possui $n$ soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com $r$ soldados e outro de retaguarda com $s$ soldados ($r + s = n$), ele poderá dispor seus homens de:

(A) $\frac{n!}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.

(B) $\frac{n!}{r!\,s!}$ maneiras distintas neste ataque.

(C) $\frac{n!}{(rs)!}$ maneiras distintas neste ataque.

(D) $\frac{2(n!)}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.

(E) $\frac{2(n!)}{r!\,s!}$ maneiras distintas neste ataque.

**Questão 03:** Dadas as funções $f(x^2) = \log_{2x} x$ e $g(x) = 2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1$ definidas para $x > 0$ e $x \neq 1/2$, o conjunto

$$A = \{x \in (0, 2\pi) : (g \circ f)(x) = 0\}$$

é dado por:

(A) $A = \left\{4^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 4^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$.

(B) $A = \left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 2^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$.

(C) $A = \left\{4^{2-\pi}, 4^{6-\pi}, 4^{6-5\pi}\right\}$.

(D) $A = \left\{4^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{2\pi}{6-\pi}}, 4^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$.

(E) $A = \left\{2^{\frac{\pi}{2-\pi}}, 4^{\frac{\pi}{6-\pi}}, 2^{\frac{5\pi}{6-5\pi}}\right\}$.

**Questão 04:** Considere os números reais não nulos $a$, $b$, $c$ e $d$ em progressão geométrica tais que $a$, $b$ e $c$ são raízes da equação (em $x$) $x^3 + Bx^2 - 2Bx + D = 0$, onde $B$ e $D$ são números reais e $B > 0$. Se $cd - ac = -2B$, então

(A) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ e $b^2 + c^2 + d^2 = \dfrac{16B^2}{B^2 - 4B}$.

(B) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{16B}{B^2 + 4}$.

(C) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)$ e $b^2 + c^2 + d^2 = \dfrac{16B}{B + 4}$.

(D) $(a^2 + b^2 + c^2)(b + c + d) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{16B}{B + 4}$.

(E) $(a^2 + b^2 + c^2)(b + c + d) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{B + 4}{16B}$.

**Questão 05:** Dado o polinômio $P$ definido por $P(x) = \operatorname{sen}\theta - (\operatorname{tg}\theta)x + (\sec^2\theta)x^2$, os valores de $\theta$ no intervalo $[0, 2\pi]$ tais que $P$ admita somente raízes reais são:

(A) $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(A) $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ou $\pi < \theta < 3\dfrac{\pi}{2}$.

(A) $\pi \leq \theta < 3\dfrac{\pi}{2}$ ou $3\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$.

(A) $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$.

(A) $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta < 3\dfrac{\pi}{2}$.

**Questão 06:** Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ onde $a = 2^{(1+\log_4 5)}$, $b = 2^{\log_4 8}$, $c = \log_{\sqrt{3}} 81$ e $d = \log_{\sqrt{3}} 27$. Uma matriz real quadrada $B$, de ordem 2, tal que $AB$ é a matriz identidade de ordem 2 é:

(A) $\begin{bmatrix} \log_{\sqrt{3}} 27 & 2 \\ 2 & \log_{\sqrt{3}} 81 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\dfrac{5}{2} \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 2 & -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & \log_2 5 \end{bmatrix}$. (E) $\begin{bmatrix} \log_2 5 & 3\log_{\sqrt{3}} 81 \\ 5 & -2^{\log_4 81} \end{bmatrix}$.

**Questão 07:** Sejam três funções $f, u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$ para todo $x$ não nulo e $(u(x))^2 + (v(x))^2 = 1$ para todo $x$ real. Sabendo-se que $x_0$ é um número real tal que $u(x_0).v(x_0) \neq 0$ e $f\left(\frac{1}{u(x_0)}.\frac{1}{v(x_0)}\right) = 2$, o valor de $f\left(\frac{u(x_0)}{v(x_0)}\right)$ é

(A) $-1$. (B) $1$. (C) $2$. (D) $\frac{1}{2}$. (E) $-2$.

**Questão 08:** A solução da equação:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x+1} = \frac{\pi}{4}$$

definida no conjuntos dos reais diferentes de $-1$ é:

(A) $1$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2}$ e $1$. (D) $2$. (E) $2$ e $1$.

**Questão 09:** Dados $A$, $B$ e $C$, ângulos internos de um triângulo, tais que $2B + C \neq \pi$ e $\alpha \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$, o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha - C}{2}\right) \\ -\cos A + \cos B = \cos\left(\dfrac{\alpha - C}{2}\right) \end{cases}$$

admite como solução:

(A) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\pi$ e $C = \frac{2}{3}\pi$.

(B) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = 0$.

(C) $A = \frac{2\pi}{3}$, $B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{2}$.

(D) $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $B = \frac{2}{3}\pi$ e $C = \frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\pi$.

(E) $A = \pi$, $B = \frac{\alpha}{2}$ e $C = -\frac{\alpha}{2}$.

**Questão 10:** Determine o polinômio $P$ de $3^o$ grau que apresenta uma raiz nula e satisfaz a condição $P(x-1) = P(x) + (2x)^2$ para todo $x$ real. Com o auxílio deste, podemos calcular a soma $2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2$, onde $n$ é um número natural, que é igual a:

(A) $\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 - \frac{2}{3}n$. (B) $\frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n$. (C) $\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + \frac{2}{3}n$.

(D) $4n^4 + 2n^2 + n$. (E) $n^3 + n^2 + 2n$.

**Questão 11:** Seja $a$ um número real tal que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Se $(x_0, y_0)$ é solução do sistema

$$(2\sec a)x + (3\operatorname{tg} a)y = 2\cos a$$
$$(2\operatorname{tg} a)x + (3\sec a)y = 0$$

então podemos afirmar que:

(A) $x_0 + y_0 = 3 - 2\operatorname{sen} a$.

(B) $\left(\frac{2}{3}x_0\right)^2 - y_0^2 = \frac{4}{9}\cos^2 a + 2$.

(C) $x_0 - y_0 = 0$.

(D) $x_0 + y_0 = 0$.

(E) $\left(\frac{2}{3}x_0\right)^2 - y_0^2 = \frac{4}{9}\cos^2 a$.

**Questão 12:** Considere uma pirâmide regular cuja base quadrada tem área que mede 64 cm$^2$. Numa seção paralela à base que dista 30 mm desta, inscreve-se um círculo. Se a área deste círculo mede $4\pi$ cm$^2$, então a altura desta pirâmide mede:

(A) 1 cm. (B) 2 cm. (C) 4 cm. (D) 6 cm. (E) 60 cm.

**Questão 13:** Sejam $m$ e $n$ constantes reais estritamente positivas. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, consideramos $C$ a circunferência de centro $P\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ e de raio $R = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$ e $r$ a reta de equação $mx + ny + \left(\sqrt{m^2+n^2} - 2\right) = 0$. Nestas condições, se $s$ é a reta que passa por $P$ e é perpendicular à reta $r$, então os pontos de interseção de $s$ com $C$ são

(A) $\left(\frac{1}{m} + 1, \frac{1}{n}\right)$ e $\left(\frac{1}{m} - 1, \frac{1}{n} - \frac{n}{m}\right)$.

(B) $\left(\frac{1}{m} + 1, \frac{n}{m}\right)$ e $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$.

(C) $\left(\frac{1}{m}, \frac{n}{m}\right)$ e $\left(\frac{1}{m}, -\frac{m}{n}\right)$.

(D) $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} + 1\right)$ e $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} + \frac{n}{m}\right)$.

(E) $\left(\frac{1}{m} + 1, \frac{1}{n} + \frac{n}{m}\right)$ e $\left(\frac{1}{m} - 1, \frac{1}{n} - \frac{n}{m}\right)$.

**Questão 14:** As equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + nbx + 12 = 0$, onde $a$ e $b$ são constantes reais e $n$ um inteiro, têm duas raízes comuns. Das afirmativas abaixo, qual é a verdadeira?

(A) As raízes não comuns às equações têm sinais opostos.
(B) As raízes não comuns às equações são negativas quando $a$ é negativo.
(C) A soma das raízes não comuns às equações é 5.
(D) $b$ e $n$ possuem o mesmo sinal.
(E) As raízes comuns às equações dependem de $n$.

**Questão 15:** Consideramos um número complexo $z$ tal que $\frac{z^2}{\overline{z}i}$ tem argumento igual a $\frac{\pi}{4}$ e $\log_2(z + \overline{z} + 2) = 3$. Nestas condições, podemos afirmar que:

(A) Não existe $\ln\left(\frac{z - \overline{z}}{i}\right)$.
(B) $z^4 + \ln\left(\frac{z - \overline{z}}{i}\right) = -324$.
(C) $z + 2\overline{z}$ é um número real.
(D) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{108}(1 + i)$.
(E) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = -\frac{1}{108}(1 + i)$.

# I.32 Vestibular 1982

**Questão 01:** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x+b} & \text{se } x \neq b \\ -1 & \text{se } x = b \end{cases}$. Se $f(f(x)) = x$ para todo $x$ real, então

(A) $ab = -2$. (B) $ab = -1$. (C) $ab = 0$. (D) $ab = 1$. (E) $ab = 2$.

**Questão 02:** Sabendo-se que o polinômio $P(x) = ax^4 + bx^2 + 2x - 2$ é divisível por $(x + 1)$ e $(x - 2)$, podemos afirmar que

(A) $a$ e $b$ têm sinais opostos e são inteiros.
(B) $a$ e $b$ têm o mesmo sinal e são inteiros.
(C) $a$ e $b$ têm sinais opostos e são racionais não inteiros.
(D) $a$ e $b$ têm o mesmo sinal e são racionais não inteiros.
(E) somente $a$ é inteiro.

**Questão 03:** Os valores de $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ que tornam o polinômio $P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 - \beta x + \gamma$ divisível por $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ satisfazem as desigualdades

(A) $\alpha > \beta > \gamma$. (B) $\alpha > \gamma > \beta$. (C) $\beta > \alpha > \gamma$. (D) $\beta > \gamma > \alpha$. (E) $\gamma > \alpha > \beta$.

**Questão 04:** Sendo $A$ uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 4, qual o valor de $x$ na equação $\det(2A^tA^t) = 4x$?

(A) 4. (B) 8. (C) 16. (D) 32. (E) 64.

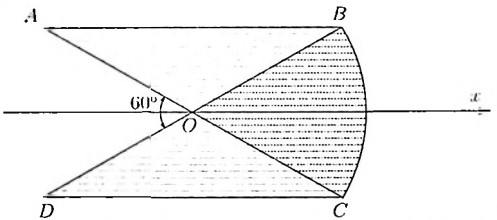
**Questão 05:** Sejam $A$, $B$ e $P$ matrizes reais quadradas de ordem $n$, tais que $B = P^tAP$. Sendo $P$ inversível, dentre as afirmações abaixo, qual é a falsa?

(A) Se $B$ é simétrica, então $A$ é simétrica.
(B) Se $A$ é simétrica, então $B$ é simétrica.
(C) Se $A$ é inversível, então $B$ é inversível.
(D) Se $B$ é inversível, então $A$ é inversível.
(E) $\det A = \det B$.

**Questão 06:** Considere a família de curvas do plano complexo, definida por $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = C$, onde $z$ é um número complexo não-nulo e $C$ é uma constante real positiva. Para cada $C$ temos uma

(A) circunferência com centro no eixo real e raio igual a $C$.
(B) circunferência com centro no eixo real e raio igual a $1/C$.
(C) circunferência tangente ao eixo real e raio igual a $1/(2C)$.
(D) circunferência tangente ao eixo imaginário e raio igual a $1/(2C)$.
(E) circunferência com centro na origem do plano complexo e raio igual a $1/C$.

**Questão 07:** A figura hachurada é a seção transversal de um sólido de revolução em torno do eixo $x$. A parte tracejada é formada por um setor circular de raio igual a 1 e ângulo igual a $60^\circ$. O segmento de reta $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo $x$. A área da superfície total do sólido mede




(A) $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\pi$. (B) $\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)\pi$. (C) $\left(\sqrt{3} + \frac{5}{2}\right)\pi$. (D) $\left(\sqrt{3} - \frac{5}{2}\right)\pi$. (E) $\frac{5\pi}{2}$.

**Questão 08:** A função $f:\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to [0,1]$ definida por $f(x) = \left(1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)\cos x$ é uma função

(A) constante.
(B) sobrejetora e ímpar.
(C) injetora e ímpar.
(D) injetora e par.
(E) sobrejetora e par.

**Questão 09:** Considere o sistema $\begin{cases} 2x - 1 = 3\operatorname{sen}\theta \\ x - 2 = \cos\theta \end{cases}$, para $x$ e $\theta$ reais. Se restringirmos $\theta$ ao intervalo $0, \frac{\pi}{2}$, então:

(A) o sistema não possuirá solução.
(B) o sistema possuirá apenas uma solução $(x_1, \theta_1)$.
(C) o sistema possuirá duas soluções $(x_1, \theta_1)$ e $(x_2, \theta_2)$, de modo que $x_1 + x_2 = \frac{40}{13}$.
(D) o sistema possuirá duas soluções $(x_1, \theta_1)$ e $(x_2, \theta_2)$, de modo que $\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{17}{12}$.
(E) o sistema possuirá duas soluções $(x_1, \theta_1)$ e $(x_2, \theta_2)$, de modo que $\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \frac{1}{2}$.

**Questão 10:** Num triângulo de lados $a = 3$ m e $b = 4$ m, diminuindo-se de $60^\circ$ o ângulo que esses lados formam, obtém-se uma diminuição de 3 m$^2$ em sua área. Portanto, a área do triângulo inicial é de:

(A) 4 m$^2$. (B) 5 m$^2$. (C) 6 m$^2$. (D) 9 m$^2$. (E) 12 m$^2$.

**Questão 11:** Num triângulo isósceles, o perímetro mede 64 m e os ângulos adjacentes são iguais ao $\arccos \frac{7}{25}$. Então a área do triângulo é de:

(A) 168 m². (B) 192 m². (C) 84 m². (D) 96 m². (E) 157 m².

**Questão 12:** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, seja $E$ uma elipse de equação $5x^2 + y^2 = 5$. Considerando $r$ e $s$ duas retas distintas, tangentes a $E$ e com coeficiente angular comum igual a 2, podemos afirmar que:

(A) As equações dessas retas são $y = 2x + p$ e $y = 2x - p$, onde $p$ é um número irracional.

(B) Os pontos de contato dessas retas com a elipse $E$ são pontos do 1º e 3º quadrantes.

(C) A equação de uma das retas é $y = 2x - 3$ e a outra tangencia $E$ num ponto cujas coordenadas são números racionais.

(D) O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos de contato de $r$ e $s$ com a elipse $E$ é $\frac{2}{5}$.

(E) A reta $y = x$ corta uma das retas, $r$ ou $s$, num ponto $M = (a, a)$, onde $a$ é real e $|a| > 7$.

**Questão 13:** Considere o triângulo $ABC$ do plano cartesiano, onde $A = (p, q)$, $B = (2p, 3q)$ e $C = (3p, 2q)$, sendo $p$ e $q$ reais. Se $M$ é o ponto de intersecção de suas medianas, então a reta que passa por $M$ e é paralela à reta $\overline{BC}$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos:

(A) $(0, p)$ e $(4p, 0)$. (B) $(0, 4q)$ e $(4p, 0)$. (C) $(0, 4p)$ e $(4q, 0)$.
(D) $(0, q)$ e $(p, 0)$. (E) $(0, 3q)$ e $(3p, 0)$.

**Questão 14:** Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $(a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ uma progressão geométrica de razão $r$ e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \log(qx^p)$ onde $p$ e $q$ são números reais positivos. Nestas condições, $f(a_1)$, $f(a_2)$, ..., $f(a_n)$ é

(A) uma progressão geométrica de razão $\log(qr^p)$.
(B) uma progressão geométrica de razão $p \log r$.
(C) uma progressão aritmética de razão $\log q - p \log a_1$.
(D) uma progressão aritmética de razão $\log q + p \log r$.
(E) uma progressão aritmética de razão $p \log r$.

**Questão 15:** O conjunto verdade da desigualdade $\log_2(\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x - 1)) < 0$ é

(A) $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. (B) $(-2, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. (C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
(D) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. (E) o conjunto vazio.

## I.33 Vestibular 1981

**Questão 01:** Dizemos que uma matriz real quadrada $A$ é singular, se $\det A = 0$, ou seja, se o determinante de $A$ é nulo, e não-singular, se $\det A \neq 0$. Mediante esta definição, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) A soma de duas matrizes $A$ e $B$ é uma matriz singular, se $\det A = -\det B$.
(B) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se, e somente se, ambas forem singulares.
(C) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se pelo menos uma delas for singular.
(D) Uma matriz singular possui inversa.
(E) A transposta de uma matriz singular é não-singular.

**Questão 02:** Se os três lados de um triângulo estão em progressão geométrica, então a razão desta progressão está compreendida entre os valores:

(A) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. (B) $\frac{1}{2}(\sqrt{4}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{4}+1)$.
(C) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$. (D) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$. (E) 0 e 1.

**Questão 03:** Os lados de um triângulo medem $a$, $b$ e $c$ centímetros. Qual o valor do ângulo interno deste triângulo, oposto ao lado que mede $a$ centímetros, se forem satisfeitas as relações: $3a = 7c$ e $3b = 8c$?

(A) $30°$. (B) $60°$. (C) $45°$. (D) $120°$. (E) $135°$.

**Questão 04:** Qual o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é de $24\pi$ cm$^2$ e o raio de sua base mede 4 cm?

(A) $\frac{16}{3}\sqrt{20\pi}$ cm$^3$. (B) $\frac{\sqrt{24}}{4}\pi$ cm$^3$. (C) $\frac{\sqrt{24}}{3}\pi$ cm$^3$.
(D) $\frac{8}{3}\sqrt{24\pi}$ cm$^3$. (E) $\frac{1}{3}\sqrt{20\pi}$ cm$^3$.

**Questão 05:** Denotemos por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não-nula que satisfaz, para todos $x$ e $y$ reais, a relação $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for definida por: $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2g(x)}{a}\right)$, $a \neq 0$, então podemos garantir que:

(A) $f$ é periódica com período $\pi a$.
(B) Para $a = n$ ($n$ natural), temos $f(n) = 2\operatorname{sen}(g(1))$.
(C) Se $g(1) \neq 0$, então $g(1) = f(0)$.
(D) Se $g(T) = \pi a$, então $T$ é o período de $f$.
(E) Se $g(T) = 2\pi$, então $T$ é o período de $f$.

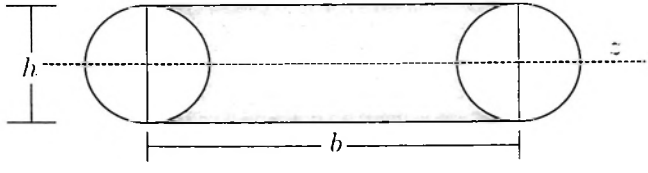
**Questão 06:** Denotemos por $\log x$ e $\log_a x$ os logaritmos de $x$ nas bases 10 e $a$, respectivamente. As raízes da equação: $2(1 + \log_x 10) = \left(\frac{1}{\log x - 1}\right)^2$ são:

(A) 10 e $\sqrt{10}$. (B) 10 e $\frac{1}{\sqrt{10}}$. (C) $\frac{1}{10}$ e $\sqrt{10}$. (D) $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{\sqrt{10}}$.
(E) Nenhuma das anteriores.

**Questão 07:** Se $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais e $]a, b[$ o intervalo aberto $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$, seja $f : ]0, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{\sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x}$. Se $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ é tal que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, então $f(\alpha)$ é igual a:

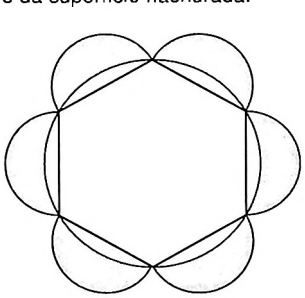
(A) $\frac{a+b}{2}$. (B) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. (C) $\frac{a^2-b^2}{ab}$. (D) $\frac{a^2+b^2}{ab}$.
(E) Nenhuma das anteriores.

**Questão 08:** Considere um retângulo de altura $h$ e base $b$ e duas circunferências com diâmetro $h$ e centros nos lados do retângulo, conforme a figura abaixo. Seja $z$ um eixo que passa pelo centro destas circunferências. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação da área hachurada da figura em torno do eixo $z$.




(A) $\pi h(b-h)$. (B) $\pi h(b-h)$. (C) $\pi b(b-h)$. (D) $\pi b(b+h)$.
(E) Nenhuma das anteriores.

**Questão 09:** Na figura abaixo, temos um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio $r$ e 6 outras semicircunferências com centros nos pontos médios dos lados do hexágono e cujos diâmetros são iguais ao lado do hexágono. Calcule a áre da superfície hachurada.



(A) $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) r^2$. (B) $\left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) r^2$ (C) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}\right) r^2$.
(D) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) r^2$. (E) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) r^2$.

**Obs.:** Nas duas questões seguintes, $\mathbb{C}$ indicará o conjunto dos números complexos, $\overline{z}$ o conjugado complexo de $z$ e $i = \sqrt{-1}$ (ou $i = (0, 1)$).

**Questão 10:** Sejam $a$ e $k$ constantes reais, sendo $a > 0$ e $0 < k < 1$. De todos os números complexos $z$ que satisfazem a relação $|z - ai| \leq ak$, qual é o de menor argumento?
(A) $z = ak\sqrt{1 - k^2} + ia(1 - k^2)$.
(B) $z = k\sqrt{1 - k^2} - ia(1 - k^2)$.
(C) $z = k\sqrt{1 - k^2} - i\sqrt{1 - k^2}$.
(D) $z = -k\sqrt{1 - k^2} - ia(1 - k^2)$.
(E) $z = a + ik$.

**Questão 11:** O conjunto $A$ definido por $A = \{z \in \mathbb{C} / (z - i)\overline{(z - i)} = 4\}$ representa no plano complexo:
(A) Uma elipse cujos focos se encontram nos pontos $i$ e $-i$.
(B) Uma circunferência de centro no ponto $(0, 1)$ e raio 2.
(C) Uma circunferência de centro no ponto $(0, 0)$ e raio 4.
(D) Um par de retas que se cortam no ponto $(1, 1)$.
(E) Nenhuma das anteriores.

**Questão 12:** Considere a equação $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Qual das relações é verdadeira?

(A) $p^2 = rq$. (B) $2p + r = q$. (C) $3p^2 = r^2q$. (D) $p^4 = rq^4$. (E) $q^4 = rp^4$.

**Questão 13:** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais verificou-se que os pontos $A = (a, 1, a)$, $B = (2a, 1, a)$ e $C = (b, a, a)$ são colineares. Além disso, o sistema

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ bx + y + z = 0 \\ bx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas $x$, $y$ e $z$ é indeterminado. Sendo $a > 0$ e $b > 0$, qual é a alternativa correta?

(A) $a$ e $b$ são números pares.
(B) $a$ e $b$ são números inteiros consecutivos.
(C) $a$ não é divisor de $b$.
(D) $0 < a < \frac{1}{2}$ e $0 < b < 1$.
(E) Nenhuma das anteriores.

**Questão 14:** Seja $xOy$ um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Com referência a este sistema, consideremos um ponto $P = (2, 0)$ e uma reta $r$ cuja equação é $x - 1 = 0$. Qual o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias ao ponto $P$ e à reta $r$ são iguais?

(A) Duas semi-retas, cujas equações são: $x - y - 1,5 = 0$ e $x + y - 1,5 = 0$, com $x \geq 1,5$.
(B) Uma circunferência, com centro no ponto $(3, 0)$ e raio 1,5.
(C) Uma parábola, cuja equação é $y = 2x^2 - 3$.
(D) Uma parábola, cuja equação é $y^2 - 2x - 3$.
(E) Nenhuma das anteriores.

**Questão 15:** Se $p_1, p_2, \ldots, p_n$ forem fatores primos de um número inteiro positivo $p$ e se $p = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_n^{s_n}$, então o número de divisores de $p$ será:

(A) $s_1 + s_2 + \ldots + s_n$.
(B) $s_1 s_2 \ldots s_n$.
(C) $s_1 s_2 \ldots s_n - 1$.
(D) $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \ldots (s_n + 1) - 1$.
(E) $(s_1 + 1)(s_2 + 1) \ldots (s_n + 1)$.

## I.34 Vestibular 1980

**Questão 01:** Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real desta equação podemos afirmar que:

(A) A solução pertence ao intervalo fechado $[1, 2]$.
(B) A solução pertence ao intervalo fechado $[-2, -1]$.
(C) A solução pertence ao intervalo aberto $(-1, 1)$.
(D) A solução pertence ao complementar da união dos intervalos anteriores.
(E) A solução não tem solução.

**Questão 02:** Seja $z$ um número complexo de módulo 1 e de argumento $\theta$. Se $n$ é um número inteiro positivo, $z^n + 1/z^n$ é igual a:

(A) $\cos(n\theta)$. (B) $2\cos(n\theta)$. (C) $\operatorname{sen}(n\theta)$.
(D) $2\operatorname{sen}(n\theta)$. (E) $\operatorname{sen}(n\theta) + \cos(n\theta)$.

**Questão 03:** Sobre a função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, podemos afirmar que:

(A) É uma função periódica de período $4\pi$.
(B) É uma função periódica de período $2\pi$.
(C) É uma função periódica de período $\pi$.
(D) É uma função periódica onde o período pertence ao intervalo aberto $(\pi, 2\pi)$.
(E) Não é uma função periódica.

**Questão 04:** Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes reais quadradas de ordem $n$ e $0_n$ a matriz nula, também de ordem $n$. Considere as seguintes afirmações:

I. $AB = BA$;
II. Se $AB = AC$, então $B = C$;
III. Se $A^2 = 0_n$, então $A = 0_n$;
IV. $(AB)C = A(BC)$;
V. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

A respeito destas afirmações, qual das alternativas abaixo é verdadeira?

(A) Apenas a afirmação I é falsa.
(B) Apenas a afirmação IV é verdadeira.
(C) A afirmação V é verdadeira.
(D) As afirmações II e III são verdadeiras.
(E) As afirmações III e IV são verdadeiras.

**Obs.:** Nesta questão justifique apenas se a afirmativa (C) está certa ou errada.

**Questão 05:** Se as dimensões, em centímetros, de um paralelepípedo reto retangular são dadas pelas raízes da equação $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$, então o comprimento da diagonal é igual a:

(A) $7/12$ cm. (B) $9/24$ cm. (C) $\sqrt{24}/12$ cm. (D) $\sqrt{61}/12$ cm. (E) $\sqrt{73}/12$ cm.

**Questão 06:** No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação $x^2 + y^2 = ax + by$, onde $a$ e $b$ são números reais não nulos, representa a curva:

(A) Circunferência de raio $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

(B) Circunferência de raio $\sqrt{a^2 + b^2}$.

(C) Circunferência de raio $\dfrac{a + b}{2}$.

(D) Parábola de vértice no ponto $(a, b)$.

(E) Elipse com semi-eixos de comprimentos $a/2$, $b/2$.

**Questão 07:** Sejam $A$ e $B$ subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e $f : A \to B$, $g : B \to A$ duas funções tais que $f \circ g = I_B$, onde $I_B$ é a função identidade em $B$. Então podemos afirmar que:

(A) $f$ é sobrejetora.
(B) $f$ é injetora.
(C) $f$ é bijetora.
(D) $g$ é injetora e par.
(E) $g$ é bijetora e ímpar.

**Questão 08:** No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a curva $y = ax^2 + bx - c$ passa pelos pontos $(1, 1)$, $(2, m)$ e $(m, 2)$, onde $m$ é um número real diferente de 2. Sobre esta curva podemos afirmar que:

(A) Ela admite um mínimo para todo $m$ tal que $1/2 < m < 3/2$.
(B) Ela admite um mínimo para todo $m$ tal que $0 < m < 1$.
(C) Ela admite um máximo para todo $m$ tal que $-1/2 < m < 1/2$.
(D) Ela admite um máximo para todo $m$ tal que $1/2 < m < 3/2$.
(E) Ela admite um máximo para todo $m$ tal que $0 < m < 1$.

**Questão 09:** No intervalo $\pi < x < 2\pi$, quais são os valores de $k$ que satisfazem a inequação $(\log_e k)^{\operatorname{sen} x} > 1$?

(A) Para todo $k > e$.
(B) Para todo $k > 2$.
(C) Para todo $k > 1$.
(D) Para todo $1 < k < e$.
(E) Para todo $0 < k < e$.

**Questão 10:** O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 5$ é:

(A) 36. (B) 48. (C) 52. (D) 54. (E) 56.

**Questão 11:** Considere a progressão aritmética $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $n$ termos, $n \geq 2$, cuja soma de seus termos é $K$. A soma da sequencia dos $n$ valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ definidos por $y_i = ax_i + b$, $i = 1, 2, \ldots, n$, onde $a$ e $b$ são números reais com $a \neq 0$, é dada por:

(A) $K$. (B) $aK + b$. (C) $aK + nb$. (D) $a^nK + nb$. (E) $a^nK$.

**Questão 12:** Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz real quadrada de ordem 2 e $I_2$ a matriz identidade também de ordem 2. Se $r_1$ e $r_2$ são as raizes da equação $\det(A - rI_2) = nr$, onde $n$ é um número inteiro positivo, podemos afirmar que:

(A) $r_1 + r_2 = a_{11} + a_{22}$.
(B) $r_1 + r_2 = -(a_{11} + a_{22})$.
(C) $r_1 - r_2 = n(a_{11} + a_{22})$.
(D) $r_1 r_2 = \det A$.
(E) $r_1 r_2 = -n \det A$.

**Questão 13:** Consideremos um triângulo retângulo que simultaneamente está circunscrito à circunferência $C_1$ e inscrito à circunferência $C_2$. Sabendo-se que a soma dos comprimentos dos catetos do triângulo é $k$ cm, qual será a soma dos comprimentos destas duas circunferências?

(A) $(2\pi k)/3$ cm. (B) $(4\pi k)/3$ cm. (C) $4\pi k$ cm. (D) $2\pi k$ cm. (E) $\pi k$ cm.

**Questão 14:** Considere uma esfera inscrita num cone circular reto tal que a área da superfície total do cone é $n$ vezes a área da superfície da esfera, $n > 1$. Se o volume da esfera é $r$ cm$^3$ e se a área da base do cone é $s$ cm$^2$, o comprimento em centímetros da altura do cone é dado por:

(A) $r/s$. (B) $(nr)/s$. (C) $(2nr)/s$. (D) $(3nr)/s$. (E) $(4nr)/s$.

**Questão 15:** Seja $f(t) = 1 + 3\cos(\pi t) + 4\operatorname{sen}(\pi t)$ a função definida em $\mathbb{R}$. Sobre esta função qual das alternativas abaixo é correta?

(A) $f(t)$ é função par.
(B) $f(t)$ é função ímpar.
(C) o maior valor que $f(t)$ assume é 9.
(D) o menor valor que $f(t)$ assume é $-3$.
(E) o menor valor que $f(t)$ assume é $-1/2$.

# I.35 Vestibular 1979

**Questão 01:** Sejam $A, B, C$ matrizes reais $3 \times 3$, satisfazendo as seguintes relações: $AB = C^{-1}$, $B = 2A$. Se o determinante de $C$ é 32, qual é o valor do módulo do determinante de $A$?

(A) 1/16. (B) 1/8. (C) 1/4. (D) 8. (E) 4.

**Questão 02:** Se $a, b, c$ são raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, onde $r$ é um número real, podemos afirmar que o valor de $a^4 + b^4 + c^4$ é:

(A) $-60$. (B) $60 + r$. (C) $60 + r^2$. (D) $60 + r^3$. (E) $60 - r$.

**Questão 03:** Seja $f$ uma função real definida para todo $x$ real tal que: $f$ é ímpar; $f(x + y) = f(x) + f(y)$; e $f(x) \geq 0$, se $x \geq 0$. Definindo $g(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x}$, se $x \neq 0$, e sendo $n$ um número natural, podemos afirmar que:

(A) $f$ é não-decrescente e $g$ é uma função ímpar.
(B) $f$ é não-decrescente e $g$ é uma função par.
(C) $g$ é uma função par e $0 < g(n) \leq f(1)$.
(D) $g$ é uma função ímpar e $0 \leq g(n) < f(1)$.
(E) $f$ é não-decrescente e $0 \leq g(n) < f(1)$.

**Questão 04:** Considere o triângulo $ABC$, onde $\overline{AD}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$. Por um ponto arbitrário $M$ do segmento $\overline{BD}$, tracemos o segmento $\overline{MP}$ paralelo a $\overline{AD}$, onde $P$ é o ponto de intersecção desta paralela com o prolongamento do lado $\overline{AC}$ (figura 1). Se $N$ é o ponto de intersecção de $\overline{AB}$ com $\overline{MP}$, podemos afirmar que:

(A) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{BM}$. (B) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{CM}$. (C) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{AB}$.
(D) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{AD}$. (E) $\overline{MN} + \overline{MP} = 2\overline{AC}$.

**Questão 05:** Se $a$ e $b$ são ângulos complementares, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} = \sqrt{3}$, então $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3a}{5}\right) + \cos(3b)$ é igual a:

(A) $\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (E) 1.

**Questão 06:** Considere uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é $a$, $a > 1$, a razão é $q$, $q > 1$, e o produto dos seus termos é $c$. Se $\log_a b = 1$, $\log_q b = 2$ e $\log_c b = 0{,}01$, quantos termos tem esta progressão geométrica?

(A) 12. (B) 14. (C) 16. (D) 18. (E) 20.

**Questão 07:** Estudando a equação $32z^5 = (z+1)^5$ no plano complexo, podemos afirmar que:

(A) A equação possui todas as raízes imaginárias, situadas numa circunferência de raio 1.
(B) A equação possui 4 raízes imaginárias, situadas uma em cada quadrante.
(C) A equação possui 2 raízes imaginárias, uma no 1º quadrante e outra no 4º quadrante.
(D) A equação possui 4 raízes imaginárias, duas no 2º quadrante e outras duas no 3º quadrante.
(E) A equação tem 4 raízes imaginárias, duas no 1º quadrante e outras duas no 4º quadrante.

**Questão 08:** Considere o sistema

$$\begin{cases} (x-y)^2 + x(1+2y) \leq 7/8 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

Se $a = a_0$ é o número real positivo para o qual a solução do sistema, $x = x_0$, $y = y_0$, é única, podemos afirmar que:

(A) $\frac{x_0}{y_0} = \frac{7}{3}$. (B) $\frac{y_0}{x_0} = \frac{6}{5}$. (C) $\frac{x_0}{y_0} = -\frac{6}{5}$. (D) $\frac{y_0}{x_0} = -\frac{3}{5}$. (E) $x_0 y_0 = -\frac{15}{8}$.

**Questão 09:** Considere o tetraedro regular (4 faces iguais) (figura 2) inscrito em uma esfera de raio $R$, onde $R$ mede 3 cm. A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é dada por:

(A) $16\sqrt{3}$ cm. (B) $13\sqrt{6}$ cm. (C) $12\sqrt{6}$ cm. (D) $8\sqrt{3}$ cm. (E) $6\sqrt{3}$ cm.

**Questão 10:** Considere o problema anterior, isto é, o tetraedro regular inscrito em uma esfera de raio $R$, onde $R$ mede 3 cm, sendo $\overline{HD}$ sua altura (figura 2). A diferença entre o volume do tetraedro e o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo $DHM$ em torno de $\overline{HD}$ é dada por:

(A) $\left(8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi\right)$ cm$^3$. (B) $\left(5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\pi\right)$ cm$^3$. (C) $\left(4\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{3}\pi\right)$ cm$^3$.
(D) $\left(3\sqrt{3} - \frac{3}{5}\sqrt{3}\pi\right)$ cm$^3$. (E) $\left(7\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{3}\pi\right)$ cm$^3$.

# I.36 Vestibular 1978

**Questão 01:** Quais as sentenças falsas nos itens abaixo?

I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles sempre interceptam o outro plano;

II. Se em dois planos, num deles existem duas retas distintas paralelas ao outro plano, os planos são sempre paralelos;

III. Em dois planos paralelos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano;

IV. Se uma reta é paralela a um plano, em tal plano existe uma infinidade de retas paralelas àquela reta;

V. Se uma reta é paralela a um plano, será paralela a todas as retas do plano.

(A) I; II; III. (B) I; II; V. (C) I; III; IV. (D) II; III; IV. (E) n.d.a.

**Questão 02:** Examinando o sistema abaixo

$$\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

podemos concluir que:

(A) o sistema é determinado.
(B) o sistema é indeterminado com 2 incógnitas arbitrárias.
(C) o sistema é indeterminado com 1 (uma) incógnita arbitrária.
(D) o sistema é impossível.
(E) n.d.a.

**Questão 03:** O lugar geométrico, no plano complexo, representado pela equação: $z\overline{z} - z_0\overline{z} - \overline{z}_0 z + k = 0$, onde $k$ é um número real positivo e $|z_0|^2 > k$. é:

(A) uma hipérbole com centro $z_0$.
(B) uma elipse com um dos focos em $z_0$.
(C) uma circunferência com centro em $z_0$.
(D) uma parábola com vértice em $z_0$.
(E) n.d.a.

**Questão 04:** Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $f$ uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Se $B \subset \mathbb{R}$ e o conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in B\}$, então:
(A) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
(B) $f(f^{-1}(B)) = B$ se $f$ é injetora.
(C) $f(f^{-1}(B)) = B$.
(D) $f^{-1}(f(B)) = B$ se $f$ é sobrejetora.
(E) n.d.a.

**Questão 05:** Sejam $r_1$ e $r_2$, respectivamente, as características das matrizes incompleta e completa do sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x + 2y + kz = 3 \\ x + y + z = 2 \\ -x - y + kz = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad M = (k + r_1 + r_2)^2.$$

Quais as condições sobre $M$ e $k$, de modo que o sistema acima admita solução única?
(A) $M = 25$ e $k = -1$. (B) $M \neq 25$ e $k = -1$. (C) $M \neq 25$ e $k \neq -1$.
(D) $M = 25$ e $k \neq -1$. (E) n.d.a.

**Questão 06:** Seja $f(x)$ uma função real de variável real. Se para todo $x$ no domínio de $f$ temos $f(x) = f(-x)$, dizemos que a função é par; se, no entanto, temos $f(x) = -f(-x)$, dizemos que a função é ímpar. Com respeito à função $g(x) = \log_e\left(\operatorname{sen} x + \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\right)$, podemos afirmar que:
(A) está definida apenas para $x \geq 0$.
(B) é uma função que não é par nem ímpar.
(C) é uma função par.
(D) é uma função ímpar.
(E) n.d.a.

**Questão 07:** Sejam a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $k$ é real e $k \neq \frac{1}{2}$, e a progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de razão $q > 0$, $a_i = q^{i-1} \det A$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Se $a_1 = \det B$, com $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{k}{3} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e a soma dos 16 (dezesseis) primeiros termos dessa progressão geométrica é igual a $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, podemos dizer que:
(A) $k = 1 - 3^{-8}$. (B) $k$ é um número negativo. (C) $k = 1 + 3^{-8}$.
(D) $k \geq 0$. (E) n.d.a.

**Questão 08:** Seja $a$ uma constante real. Eliminando $\theta$ das equações abaixo:

$$\begin{cases} x.\operatorname{sen}\theta + y.\cos\theta = 2a.\operatorname{sen}2\theta \\ x.\cos\theta - y.\operatorname{sen}\theta = a.\cos 2\theta \end{cases}$$

Obtemos:

(A) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$. (B) $(x-y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

(C) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (y-x)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (D) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{2}$. (E) n.d.a.

**Questão 09:** Sejam $P$ um ponto interior de um triângulo equilátero $MNQ$ de lado $2\lambda$, $m(\overline{PA}) = x$, $m(\overline{PB}) = y$, $m(\overline{PC}) = z$ as respectivas distâncias do ponto $P$ aos lados $\overline{MN}$, $\overline{MQ}$ e $\overline{NQ}$ e $xy = xz = yz = \dfrac{\lambda^2}{9}$. Então, o valor de $x^2 + y^2 + z^2$ é:

(A) $3\dfrac{\lambda^2}{2}$.

(B) $5\dfrac{\lambda^2}{4}$.

(C) $7\dfrac{\lambda^2}{3}$.

(D) impossível de ser obtido, pois a posição do ponto $P$ não está determinada no triângulo.

(E) n.d.a.

**Questão 10:** Seja $z$ um número complexo. Se $z + \dfrac{1}{z}$ é um número real então podemos afirmar:

(A) $z \neq 0$ e $\operatorname{Re} z \geq 0$.

(B) $\operatorname{Im} z = 0$ ou $|z| = 1$.

(C) é necessariamente um número real.

(D) $z^2 = -1$.

(E) n.d.a.

**Questão 11:** Seja $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, onde $a_m$, $a_{m-1}$, ..., $a_1$, $a_0$ são reais e $a_m \neq 0$ e $a_0 \neq 0$. Se $f(1)$ é solução real da equação $2^{x-3} + 2^{x-4} = 2^{x-2} - 2^{x-1} + 14$ e $f(-1) = 2f(1)$ e $a_0 = 2f(-1)$, então podemos afirmar:

(A) $f(x)$ tem somente raízes reais positivas.

(B) $f(x)$ tem somente raízes negativas.

(C) $f(x)$ tem somente raízes reais inteiras.

(D) $f(x)$ não tem raízes reais inteiras.

(E) n.d.a.

**Questão 12:** Se numa esfera de raio $R$, circunscrevemos um cone reto cuja geratriz é igual ao diâmetro da base, então a expressão do volume deste cone em função do raio da esfera é dada por:

(A) $3\pi R^3$. (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi R^3$. (C) $3\sqrt{3}R^3$. (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi R^3$. (E) n.d.a.

**Questão 13:** Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_6$ raízes do polinômio $P(x) = 6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6$, então:

(A) $P(x)$ admite mais de duas raízes negativas.

(B) $\sum_{j=1}^{6} x_j > \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{x_j}$.

(C) $P(x)$ admite duas raízes irracionais.

(D) $\sum_{j=1}^{6} x_j = 0$ pois $P(x) = 0$ é uma equação recíproca.

(E) n.d.a.

**Questão 14:** Se $a > 1$, o valor real de $m$ para o qual a equação $x^4 - 9x^2 + (\log_e a^m + 8)x - \log_e a^m = 0$ tenha raízes em progressão aritmética é dado por:

(A) $m = \log_e a - 8$ ou $m = -9a$. (B) $m = \log_e a - 9$. (C) $m = \frac{15}{\log_e a}$.

(D) $m = -\frac{9}{8}\log_e a$. (E) n.d.a.

**Questão 15:** Os catetos $b$ e $c$ de um triângulo retângulo de altura $h$ (relativa à hipotenusa) são dados pelas seguintes expressões: $b = \sqrt{k + \frac{1}{k}}$ e $c = \sqrt{k - \frac{1}{k}}$ onde $k$ é um número real maior que 1. Então o valor de $h$ em função de $k$ é:

(A) $\frac{\sqrt{k^2-1}}{2k}$. (B) $\frac{k^2-1}{k^2-2}$. (C) $\frac{\sqrt{1+k^2}}{-1-k^2}$. (D) $\frac{\sqrt{2(k^2-1)}}{2k}$. (E) n.d.a.

**Questão 16:** Sejam $y = F(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ uma função real de variável real e $x = x_n$ $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ uma progressão aritmética de razão $r > 0$. Nestas condições, uma das alternativas abaixo é correta:

(A) $y_n = F(x_n)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ constitui uma progressão aritmética de razão $a^r$.
(B) $y_n = F(x_n)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão $-a^r$.
(C) $y_n = F(x_n)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ não é progressão aritmética e nem progressão geométrica.
(D) $y_n = F(x_n)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão $q > 1$, se admitirmos que $a < 1$.
(E) n.d.a.

**Questão 17:** Consideremos a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1, & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 2x - 5, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Se $a = \log_2 1024$ e $x_0 = a - 6$, então o valor da função $f(x)$ no ponto $x_0$, $f(x_0)$, é dado por:

(A) $f(x_0) = 1$. (B) $f(x_0) = 2$. (C) $f(x_0) = 3$. (D) $f(x_0) = \dfrac{1}{8}$. (E) n.d.a.

**Questão 18:** Qual das funções definidas abaixo é bijetora?

**Obs.:** $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $[a, b]$ é o intervalo fechado.

(A) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^2$.
(B) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x + 1$.
(C) $f : [1, 3] \to [2, 4]$ tal que $f(x) = x + 1$.
(D) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$.
(E) n.d.a.

**Questão 19:** A soma de todos os valores de $x$ que satisfazem a identidade abaixo:

$$9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1,$$

é:

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. (E) n.d.a.

**Questão 20:** Seja o triângulo de vértices $A : (1, 2)$, $B : (2, 4)$ e $C : (4, 1)$, no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. A distância do ponto de encontro das alturas desse triângulo ao lado $\overline{AC}$ é:

(A) $\dfrac{9\sqrt{10}}{70}$. (B) $\dfrac{9}{70}$. (C) $8\sqrt{10}$. (D) $3\sqrt{3}$. (E) n.d.a.

## I.37 Vestibular 1977

**Questão 01:** Se $P(x)$ é um polinômio de $5^o$ grau que satisfaz as condições $1 = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$ e $P(6) = 0$, então temos:
(A) $P(0) = 4$. (B) $P(0) = 3$. (C) $P(0) = 9$. (D) $P(0) = 2$. (E) n.d.a.

**Questão 02:** Se $S$ é a área total de um cilindro reto de altura $h$ e se $m$ é a razão direta entre a área lateral e a soma das áreas das bases, então o valor de $h$ é dado por:
(A) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{2\pi(m+1)}}$. (B) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{4\pi(m+2)}}$.
(C) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{2\pi(m+2)}}$. (D) $h = m\sqrt{\dfrac{S}{4\pi(m+1)}}$. (E) n.d.a.

**Questão 03:** Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Em relação à equação $5x^3 - 15x^2 - 15x - 20 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:
(A) não contém solução inteira.
(B) tem somente uma solução.
(C) tem somente duas soluções distintas.
(D) tem três soluções distintas.
(E) n.d.a.

**Questão 04:** Considere um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio $R$ tal que a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa vale $R/m$ ($m \geq 1$). Considere a esfera gerada pela rotação desta circunferência em torno de um de seus diâmetros. O volume da parte desta esfera, que não pertence ao sólido gerado pela rotação do triângulo em torno da hipotenusa, é dado por:
(A) $\dfrac{2}{3}\pi R^3\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2$. (B) $\dfrac{2}{3}\pi R^3\left[1-\left(\dfrac{m+1}{m}\right)^2\right]$.
(C) $\dfrac{2}{3}\pi R^3\left(\dfrac{m+1}{m}\right)^2$. (D) $\dfrac{2}{3}\pi R^3\left[1+\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^2\right]$. (E) n.d.a.

**Questão 05:** Seja $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \ln \frac{n\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$. Com respeito à função $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(3e^x)}{\operatorname{sen} e^x} - \frac{\cos(3e^x)}{\cos e^x}$, podemos afirmar que:

(A) $f(x) = 2$ para todo $x$ em $D$.
(B) $f(x) = 3$ para todo $x$ em $D$.
(C) $f(x) = e^3$ para todo $x$ em $D$.
(D) $f(x)$ não é constante em $D$.
(E) n.d.a.

**Questão 06:** Consideremos $m$ elementos distintos. Destaquemos $k$ dentre eles. Quantos arranjos simples daqueles $m$ elementos tomados $n$ a $n$ ($A_{m,n}$) podemos formar, de modo que em cada arranjo haja sempre, contíguos e em qualquer ordem de colocação, $r$ ($r < n$) dos $k$ elementos destacados?

(A) $(n - r - 1)A_{k,r}A_{m-k,n-r}$. (B) $(n - r + 1)A_{k,r}A_{m-r,n-k}$.
(C) $(n - r - 1)A_{k,r}A_{m-r,n-k}$. (D) $(n - r + 1)A_{k,r}A_{m-k,n-r}$. (E) n.d.a.

**Questão 07:** Seja $p$ um plano. Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ pontos de $p$ e $M$ um ponto qualquer não pertencente a $p$. Então:

(A) Se $C$ dividir o segmento $\overline{AB}$ em partes iguais e $m(\overline{MA}) = m(\overline{MB})$, então o segmento $\overline{MC}$ é perpendicular a $p$.
(B) Se $ABC$ for um triângulo equilátero e $D$ for equidistante de $A$, $B$ e $C$, então o segmento $\overline{MD}$ é perpendicular a $p$.
(C) Se $ABC$ for um triângulo equilátero e $D$ for equidistante de $A$, $B$ e $C$, então $m(\overline{MA}) = m(\overline{MB}) = m(\overline{MC})$ implica em que o segmento $\overline{MD}$ é perpendicular a $p$.
(D) Se $ABC$ for um triângulo equilátero e o segmento $\overline{MD}$ for perpendicular a $p$, então $D$ é equidistante de $A$, $B$ e $C$.
(E) n.d.a.

**Questão 08:** Resolvendo a equação $\operatorname{tg}\left(2 \ln x - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(\ln x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ temos:

(A) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (B) $x = e^{\frac{\pi}{2} \pm k\pi}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
(C) $\ln x = \frac{\pi}{6} \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (D) $x = e^{\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (E) n.d.a.

**Questão 09:** Sendo $S_k = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k+1)x^k$, onde $x > 1$ e $k$ é um inteiro maior que 2, então, se $n$ é um inteiro maior que 2:

(A) $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

(B) $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \dfrac{(n+1)}{1-x}x^{n+1}$.

(C) $S_n = \dfrac{1 + x^{n+1}}{(1-x)} - \dfrac{(n+2)}{(1-x)^2}x^{n+1}$.

(D) $S_n = \dfrac{1 + x^{n+1}}{(1-x)^2} + \dfrac{(n+2)}{(1-x)}x^{n+1}$.

(E) n.d.a.

**Questão 10:** Os valores reais de $a$ e $b$, para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ têm duas raízes comuns, são:

(A) $a = 1$; $b = 2$. (B) $a = -1$; $b = 4$. (C) $a = 5$; $b = 3$. (D) $a = -4$; $b = 1$. (E) n.d.a.

**Questão 11:** Considere a função $F(x) = |x^2 + 1|$ definida em $\mathbb{R}$. Se $F \circ F$ representa a função composta de $F$ com $F$, então:

(A) $(F \circ F)(x) = x|x^2 - 1|$, para todo $x$ real.
(B) Não existe número real $y$, tal que $(F \circ F)(y) = y$.
(C) $F \circ F$ é uma função injetora.
(D) $(F \circ F)(x) = 0$, apenas para dois valores reais de $x$.
(E) n.d.a.

**Questão 12:** Considere um triângulo $ABC$ cujos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ verificam a relação $\operatorname{sen}\hat{A} = \operatorname{tg}\dfrac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$. Então podemos afirmar que:

(A) Com os dados do problema, não podemos determinar $\hat{A}$ nem $\hat{B}$ e nem $\hat{C}$.
(B) Um desses ângulos é reto.
(C) $\hat{A} = \dfrac{\pi}{6}$ e $\hat{B} + \hat{C} = \dfrac{5\pi}{6}$.
(D) $\hat{A} = \dfrac{\pi}{3}$, $\hat{B} = \dfrac{\pi}{4}$, $\hat{C} = \dfrac{5\pi}{12}$.
(E) n.d.a.

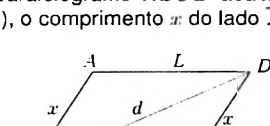
**Questão 13:** Se colocarmos em ordem crescente todos os números de 5 (cinco) algarismos distintos, obtidos com 1, 3, 4, 6 e 7, a posição do número 61473 será:

(A) 76ª. (B) 78ª. (C) 80ª. (D) 82ª. (E) n.d.a.

**Questão 14:** Se $\dfrac{6-5x}{x^3-5x^2+6x} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$ onde $A$, $B$ e $C$ são reais e $a$, $b$ e $c$ são raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, então:

(A) $A = -2$; $B = -1$; $C = 0$. (B) $A = 2$; $B = 4$; $C = 1$.
(C) $A = 1$; $B = -3$; $C = 2$. (D) $A = 5$; $B = 2$; $C = 1$. (E) n.d.a.

**Questão 15:** Sejam $d$ e $L$ respectivamente os comprimentos da diagonal $\overline{BD}$ e do lado $\overline{BC}$ do paralelogramo $ABCD$ abaixo. Conhecendo-se os ângulos $\alpha$ e $\beta$ (ver figura), o comprimento $x$ do lado $\overline{AB}$ é dado por




(A) $x = \dfrac{d\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$. (B) $x = \dfrac{d\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}$.
(C) $x = \dfrac{L\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$. (D) $x = \dfrac{L\cos\alpha}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}$. (E) n.d.a.

**Questão 16:** Sejam $A$, $B$ e $C$ três pontos distintos de uma reta, com $B$ entre $A$ e $C$. Sejam $a$ e $b$ $(a > 2b)$ os comprimentos de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ respectivamente. Se o segmento $\overline{BD}$ é perpendicular ao segmento $\overline{AC}$, quanto deve medir $\overline{BD}$, para que o ângulo $B\hat{D}C$ seja a metade de $B\hat{D}A$?

(A) $x = \dfrac{a}{\sqrt{b(a-2b)}}$. (B) $x = \dfrac{ab}{\sqrt{b(a-2b)}}$.
(C) $x = \dfrac{b}{\sqrt{a(a-2b)}}$. (D) $x = \dfrac{ab}{\sqrt{a(a-2b)}}$. (E) n.d.a.

**Questão 17:** Supondo $a < b$, onde $a$ e $b$ são constantes reais, considere a função $H(x) = a + (b-a)x$ definida no intervalo fechado $[0, 1]$. Podemos assegurar que:

(A) $H$ não é uma função injetora.
(B) Dado qualquer $\overline{y}$, $b$, sempre existe um $\overline{x}$ em $[0, 1]$ satisfazendo $H(\overline{x}) = \overline{y}$.
(C) Para cada $\overline{y}$, com $a < \overline{y} < b$, corresponde um único real $\overline{x}$, com $0 < \overline{x} < 1$, tal que $H(\overline{x}) = \overline{y}$.
(D) Não existe uma função real $G$, definida no intervalo fechado $[a, b]$, satisfazendo a relação $G(H(x)) = x$, para cada $x$ em $[0, 1]$.
(E) n.d.a.

**Questão 18:** No conjunto dos números reais, a desigualdade $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2-5)] > 0$ é verdadeira para:

(A) $\sqrt{5} < |x| < 3$. (B) $\sqrt{5} < |x| < \sqrt{6}$. (C) $\sqrt{6} < |x| < 3$.
(D) $|x| > 3$. (E) n.d.a.

**Questão 19:** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, uma das retas tangentes à circunferência de equação $x^2+y^2+2x+4y-20=0$, passando pelo ponto $P_0(-2,5)$, tem por equação:

(A) $3x-y+1=0$. (B) $x+y-3=0$.
(C) $x+3y-13=0$. (D) $4x-3y+23=0$. (E) n.d.a.

**Questão 20:** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da circunferência que passa pelos pontos $P_1(0,-3)$ e $P_2(4,0)$, e cujo centro está sobre a reta $x+2y=0$, é:

(A) $5(x^2+y^2)+2x+3y=0$. (B) $5(x^2+y^2)-14x+7y-24=0$.
(C) $x^2+y^2+4x-2y-15=0$. (D) $x^2+y^2-2x+y+5=0$. (E) n.d.a.

**Questão 21:** Seja $x=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz quadrada $2\times 2$ onde $m$ é um número inteiro qualquer. Se $P=(a_{ij})$ é uma matriz definida por $P=X^n+X^{n-1}+X^{n-2}+\ldots+X$, onde $n$ é um número inteiro positivo ($n\geq 1$), então podemos afirmar que:

(A) Um elemento $a_{ij}$ da matriz $P$ é igual a $m\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(B) Um elemento $a_{ij}$ da matriz $P$ é igual a $m\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(C) Um elemento $a_{ij}$ da matriz $P$ é igual a $n\dfrac{m(m-1)}{2}$.

(D) $P$ é uma matriz cujos elementos são todos inteiros, se, e somente se, $m$ é par.

(E) n.d.a.

**Questão 22:** Qual o valor de $b$ ($b>0$) na expressão $bx+a$, sabendo-se que ao elevarmos este binômio a uma determinada potência inteira e positiva, uma das parcelas do desenvolvimento é $6840a^{18}x^2$?

(A) um número par maior que 8.
(B) um número ímpar maior que 8.
(C) um número par menor que 8.
(D) um número ímpar menor que 8.
(E) n.d.a.

**Questão 23:** O número de diagonais de um polígono regular de $2n$ lados, que não passam pelo centro da circunferência circunscrita a este polígono, é dado por:

(A) $2n(n-2)$. (B) $2n(n-1)$. (C) $2n(n-3)$. (D) $\frac{n(n-5)}{2}$. (E) n.d.a.

**Questão 24:** O ângulo da geratriz com o eixo de um cone de revolução mede $30°$. Se $S$ é a área de sua secção reta a uma distância $h$ do vértice, qual a relação entre $S$ e $h$?

(A) $S = \frac{\pi h^2}{2}$. (B) $S = \frac{3\pi}{2}h^2$. (C) $S = \frac{\pi h^2}{3}$. (D) $S = \frac{2\pi}{3}h^2$. (E) n.d.a.

**Questão 25:** Seja

$$\begin{aligned}(k_1+k_2)x+(k_2-k_3)y+(k_1-k_3)z&=0\\(k_2-k_1)x+(k_2+k_3)y+(k_3-k_1)z&=0\\(k_1-k_2)x+(k_3-k_2)y+(k_3+k_1)z&=0\end{aligned}$$

um sistema homogêneo de equações lineares reais em $x$, $y$ e $z$. Com respeito ao sistema acima podemos afirmar:

(A) Se $k_1 \neq \pm k_2$, $k_1 \neq \pm k_3$ e $k_2 \neq \pm k_3$, então o sistema só admite solução trivial.
(B) Se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.
(C) O sistema admite solução não trivial, se e somente se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$.
(D) Se $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.
(E) n.d.a.

**Obs.:** Uma solução de um sistema homogêneo de equações lineares em $x$, $y$ e $z$ é chamada de trivial se $x = y = z = 0$.

## I.38 Vestibular 1976

**Questão 01:** Considere $g : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ uma função tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$. Então, temos:

(A) a equação $g(x) = x$ tem solução se, e somente se, $g$ é injetora.
(B) $g$ é injetora, mas não é sobrejetora.
(C) $g$ é sobrejetora, mas não é injetora.
(D) se $g$ não é sobrejetora, então $g(g(x)) = x$ para todo $x$ em $\{a, b, c\}$.
(E) n.d.r.a.

**Questão 02:** Sejam $A$ e $B$ conjuntos infinitos de números naturais. Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são funções tais que $f(g(x)) = x$, para todo $x$ em $B$, e $g(f(x)) = x$, para todo $x$ em $A$, então, temos:

(A) existe $x_0$ em $B$, tal que $f(y) = x_0$, para todo $y$ em $A$.
(B) existe a função inversa de $f$.
(C) existem $x_0$ e $x_1$ em $A$, tais que $x_0 \neq x_1$ e $f(x_0) = f(x_1)$.
(D) existe $a$ em $B$, tal que $g(f(g(a))) \neq g(a)$.

**Questão 03:** Suponhamos que $z_1 = a + xi$ e $z_2 = a + yi$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, são dois números complexos, tais que $z_1.z_2 = 2$. Então temos:

(A) $z_1 = \overline{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = 2$. (B) $z_1 = z_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$.
(C) $z_1 = \overline{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$. (D) $z_1 + z_2 = 2a$ e $a^2 + y^2 = 4$. (E) n.d.r.a.

**Questão 04:** As raízes de ordem 4 do número $z = e^{\frac{\pi i}{2}}$, onde $i$ é a unidade imaginária, são:

(A) $z_k = \cos\theta_k + i\,\mathrm{sen}\,\theta_k$, onde $\theta_k = \dfrac{1 + 4k}{8}\pi$, com $k = 0, 1, 2, 3$.
(B) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \dfrac{1 + 3k}{8}\pi$, com $k = 0, 1, 2, 3$.
(C) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = 4k\pi$, com $k = 0, 1, 2, 3$.
(D) $z_k = e^{i\theta_k}$, onde $\theta_k = \dfrac{1 - 4k}{8}\pi$, com $k = 0, 1, 2, 3$.
(E) n.d.r.a.

**Questão 05:** Os valores reais $a$ e $b$, tais que os polinômios $x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ e $x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x + 1$, são:

(A) dois números inteiros positivos.
(B) dois números inteiros negativos.
(C) números inteiros, sendo que um é positivo e o outro negativo.
(D) dois números reais, sendo um racional e o outro irracional.
(E) n.d.r.a.

**Questão 06:** Se designarmos por $S_n$ a soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão geométrica de infinitos termos, de razão $q > 1$ e primeiro termo $a_1 > 0$, podemos afirmar que:

(A) $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}$. (B) $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n}}{S_{3n} - S_{2n}}$.

(C) $\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = S_{3n} - S_n$. (D) $S_{3n} = S_{2n} + S_n$. (E) n.d.r.a.

**Questão 07:** Dado um paralelepípedo retângulo, de volume $V$, cujas arestas estão em progressão geométrica, de razão $q$, podemos garantir que sua área total é dada por:

(A) $\frac{2V^{\frac{2}{3}}}{q}(q^2 + q + 1)$. (B) $\frac{V^{\frac{2}{3}}}{q}(q^2 + q - 1)$.

(C) $\frac{V^{\frac{2}{3}}}{q+1}(q^2 + q + 1)$. (D) $\frac{V^2}{q^3}(q + 1)$. (E) n.d.r.a.

**Questão 08:** Numa superfície esférica de área $A > 1$, considere inscrito um cone, tal que a área de sua base seja igual à sua altura. Nestas condições, temos que o volume do cone é dado por:

(A) $V = \frac{1}{3}\pi^2 A^{\frac{4}{2}}$. (B) $V = \frac{1}{3}\pi A^2$.

(C) $V = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{\pi A} - 1}{\pi}\right)^2$. (D) $V = \frac{1}{3}\pi\left(A^{\frac{3}{2}} - 1\right)$. (E) n.d.r.a.

**Questão 09:** Considere um tetraedro regular circunscrito a uma esfera de raio $R$. Designando por $H$, $a$, $h$ e $V$, respectivamente, a altura, a aresta, a altura da base e o volume desse tetraedro, temos:

(A) $V = \frac{2\sqrt{3}}{3}R^3$ e $h = \frac{3\sqrt{2}}{4}H$. (B) $V = 8\sqrt{3}R^3$ e $a = \frac{\sqrt{6}}{2}H$.

(C) $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}R^3$ e $H = 4R$. (D) $V = 6\sqrt{2}R^3$ e $H = 4R$. (E) n.d.r.a.

**Questão 10:** Seja $A$ uma função real de variável real $x$, tal que: $e^{2x} - 2e^x \cdot A(x) + 1 = 0$, para todo número real $x$. Nestas condições, temos:

(A) $A(0) = 1$, $A(x) = A(-x)$, para todo número real $x$, e não existe um número real $x \neq 0$ satisfazendo a relação $A(x) = 1$.

(B) $A(0) = 1$ e $A(x) = 0$, para algum número real $x$.

(C) $A(1) < 0$ e $A(x) = A(-x)$, para todo número real $x$.

(D) não existe um número real $x$, não nulo, satisfazendo a relação $A(x) = 1$ e não existe um número real $x$ satisfazendo $A(x) = A(-x)$.

(E) n.d.r.a.

**Questão 11:** Considere a seguinte função real de variável real

$$M(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x}$$

Então:

(A) Para todo $x > 1$, ocorre: $M(x) > 1$.
(B) Para todo número real $x$ ocorrem, simultaneamente, $M(-x) = -M(x)$ e $0 \leq M(x) < 1$.
(C) Existem: um $a$ (número real positivo) e um $b$ (número real negativo), tais que: $M(a) < M(b)$.
(D) $M(x) = 0$, somente quando $x = 0$ e $M(x) > 0$ apenas quando $x < 0$.
(E) n.d.r.a.

**Questão 12:** No sistema decimal, quantos números de cinco algarismos (sem repetição) podemos escrever, de modo que os algarismos 0 (zero), 2 (dois) e 4 (quatro) apareçam agrupados?
**Obs.:** Considerar somente números de 5 algarismos em que o primeiro algarismo é diferente de zero.

(A) $2^4.3^2.5$. (B) $2^5.3.7$. (C) $2^4.3^3$. (D) $2^5.3^2$. (E) n.d.r.a.

**Questão 13:** Em relação à equação $x^{\log_1 \sqrt{x}} = x^{\log_1 x} - 2$, $x > 0$, temos:

(A) admite apenas uma raiz, a qual é um número inteiro positivo.
(B) não admite uma raiz inteira satisfazendo a relação: $0 < x < 35$.
(C) todas as suas raízes são números irracionais.
(D) admite uma raiz inteira $x_1$ e admite uma raiz fracionária $x_2$, tais que $x_1^2 + x_2^2 = \frac{4097}{64}$.
(E) n.d.r.a.

**Questão 14:** Seja $Q$ uma matriz $4 \times 4$, tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$. Então, temos:

(A) $\det Q = 2$. (B) $\det Q = -2$. (C) $\det Q = -16$. (D) $\det Q = 16$. (E) n.d.r.a.

**Questão 15:** Se $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é matriz $3 \times 3$, então uma solução da equação $(P - X)^2 = P^2 + X^2 + 2PX$ é:

(A) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$. (B) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

(C) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$. (D) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$. (E) n.d.r.a.

**Questão 16:** Considere a matriz $3 \times 3$ $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$ sabendo que

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então, temos:

(A) $\det M$ é um número positivo.

(B) Existe uma matriz $P$, $3 \times 3$, tal que: $MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $M_{21} = -3M_{22} - 2M_{23}$.

(D) Se $M_{21} = 3M_{22} + 2M_{23}$, então $M_{21} \neq 0$.

(E) n.d.r.a.

**Questão 17:** A inequação $4\operatorname{sen}^2 x - 2(1+\sqrt{2})\operatorname{sen} x + \sqrt{2} < 0$ tem uma solução $x$, tal que:

(A) $45° < x < 60°$. (B) $0° < x < 30°$.

(C) $35° < x < 45°$. (D) $60° < x < 75°$. (E) n.d.r.a.

**Questão 18:** Resolvendo a equação:

$$3\,\mathrm{sen}^2(e^x) - 2\sqrt{3}.\,\mathrm{sen}(e^x).\cos(e^x) - 3\cos^2(e^x) = 0$$

obtemos:

(A) $e^x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(B) $x = \log_e\left(2k\pi \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

(C) $e^x = k\pi + \dfrac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

(D) $x = \log_e\left(\dfrac{k}{2}\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

(E) n.d.r.a.

**Questão 19:** A respeito do produto:

$$P = (\mathrm{sen}(bx) + \mathrm{cosec}(bx))\,(\cos(bx) + \sec(bx))\,(\mathrm{tg}(bx) + \mathrm{cotg}(bx))$$

podemos afirmar que:

(A) $P$ é positivo, para todo $x$ real e $b > 0$.

(B) $P$ pode ser negativo ou positivo, dependendo da escolha de $x$ e $b$ em $\mathbb{R}$.

(C) $P$ é negativo para $x = k\pi$ e $b < 0$ ou $P$ é positivo para $x = k\pi$ e $b > 0$, quando $k = 1, 2, \ldots$.

(D) $P$ é positivo, quando $bx \neq \dfrac{k}{2}\pi$, para todo $k = 0, \pm 1, +2, \ldots$.

(E) n.d.r.a.

**Questão 20:** A soma dos quadrados das raízes da equação

$$x^3 + \sqrt{5}x^2 + 2\sqrt{3}x + 8 = 0$$

é igual a:

(A) $5$. (B) $5 - 4\sqrt{3}$. (C) $12.\sqrt{5}$. (D) $9 + \sqrt{5} + 2\sqrt{3}$. (E) n.d.r.a.

**Questão 21:** Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere $P_1$ a circunferência de equação $2x^2 + 2y^2 - 11x + 6y - 8 = 0$. Então, a equação da circunferência que é tangente ao eixo das abscissas e com o mesmo centro de $P_1$ é dada por:

(A) $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{11}{4}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. (B) $\left(x + \dfrac{4}{11}\right)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{2}{3}$.

(C) $\left(x - \dfrac{11}{4}\right)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$. (D) $2x^2 + 2y^2 - 11x + 6y - \dfrac{1}{8} = 0$. (E) n.d.r.a.

**Questão 22:** Em que intervalo estão as raízes reais da equação $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 6x - 9 = 0$?

(A) $[150, 200]$. (B) $[-14, -12]$. (C) $[12, 13]$. (D) $[-10, 10]$. (E) n.d.r.a.

**Questão 23:** A equação $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$ admite uma raiz igual a $i$ (unidade imaginária). Deduzimos, então, que

(A) tal equação não admite raiz real menor que 2.
(B) tal equação admite como raiz um número racional.
(C) tal equação não admite como raiz um número positivo.
(D) tal equação não possui raiz da forma $bi$, com $b < 1$.
(E) n.d.r.a.

**Questão 24:** Considere as equações

$$x^2 + y^2 = axy \qquad \text{(I)}$$
$$x^4 + y^4 = bx^2y^2 \qquad \text{(II)}$$

com $a$ e $b$ constantes reais e assuma que $P = a^2 - (b+2)$. Nestas condições, temos:

(A) Para todos $a$ e $b$ reais, satisfazendo a relação $P = 0$, existe uma solução de (I) que não é solução de (II).
(B) Para todos $a$ e $b$ reais, satisfazendo a relação $P = 0$, ocorre: qualquer solução de (I) é também solução de (II).
(C) Para todos $a$ e $b$ reais, satisfazendo a relação $P = 0$, apenas o par $(x, y) = (0, 0)$ é solução, simultaneamente de (I) e (II).
(D) Para todos $a$ e $b$ reais, satisfazendo a relação $P \neq 0$, o par $(x, y) = (1 + \sqrt{\pi}, 1 - \sqrt{\pi})$ é solução, simultaneamente, de (I) e (II).
(E) n.d.r.a.

**Questão 25:** Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais positivos, com $n \geq 2$ e que $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = 4$. Nesta situação, a respeito do produto $P = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n)$, temos

(A) $P \geq 2^{n+3}$. (B) $P \geq 5^n$. (C) $P \geq 2^{n+1}$. (D) $P \geq 5^{n+1}$. (E) n.d.r.a.

## I.39 Vestibular 1975

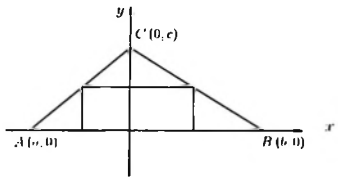
**Questão 01:** Qual é o valor de $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2$?

(A) $\binom{n}{n}$. (B) $\binom{2n}{n}$. (C) $\binom{n^2}{n}$. (D) $2^n$. (E) NDA.

**Questão 02:** Seja $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ definida em $\mathbb{R}$. Se $g$ for a função inversa de $f$, o valor de $e^{g(\frac{7}{25})}$ será:

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{7e}{25}$. (C) $\log_e\left(\dfrac{25}{7}\right)$. (D) $e^{(\frac{7}{25})^4}$. (E) NDA.

**Questão 03:** Uma equação do lugar geométrico das intersecções das diagonais dos retângulos inscritos no triângulo $ABC$ e com um lado em $\overline{AB}$ (figura abaixo) é:




(A) $x + \dfrac{2(a+b)}{c}y = a + b$.

(B) $x - \dfrac{a+b}{c}y = \dfrac{a-b}{2}$.

(C) $ax + 3(b+c)y = \dfrac{a+c}{2}$.

(D) $x + cy + ab = 0$.

(E) NDA.

**Questão 04:** A expressão $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{8} + \dfrac{5}{16} + \ldots$ vale

(A) 4. (B) $\dfrac{9}{2}$. (C) $\dfrac{7}{2}$. (D) 3,8. (E) NDA.

**Questão 05:** Se dividirmos um polinômio $P(x)$ por $x - 2$ o resto é 13 e se dividirmos $P(x)$ por $(x + 2)$ o resto é 5. Supondo que $R(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 4$, podemos afirmar que o valor de $R(x)$, para $x = 1$ é:

(A) zero. (B) 7. (C) 9. (D) 11. (E) NDA.

**Questão 06:** Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$, tal que $A^{-1} = A^t$. Se $\det A = 1$, dizemos que $A$ é uma matriz de rotação e se $\det A = -1$, $A$ é uma matriz de reflexão. Apoiados em tais definições, podemos afirmar que:

(A) se $n$ é ímpar, o produto de duas matrizes de reflexão é de reflexão.
(B) a soma de duas matrizes de rotação é de rotação.
(C) o produto de duas matrizes de rotação é de rotação.
(D) a matriz inversa de toda matriz de rotação é de reflexão.
(E) NDA.

**Questão 07:** Sabendo-se que $\operatorname{sen} x = \dfrac{m-n}{m+n}$, $n > 0$ e $m > 0$, podemos afirmar que $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$ é igual a

(A) $\dfrac{n}{m}$. (B) $\dfrac{\sqrt{m}}{n}$. (C) $1 - \dfrac{n}{m}$. (D) $\sqrt{\dfrac{n}{m}}$. (E) NDA.

**Questão 08:** A respeito da equação $(x^2 + 3x + 2)^2 - 8(x^2 + 2x) - 8x = 1$, podemos afirmar que

(A) todas as raízes são inteiras.
(B) uma raiz é nula e as outras são positivas.
(C) a soma dos módulos das raízes é 6.
(D) o módulo da maior raiz é 5.
(E) NDA.

**Questão 09:** Se $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$, $Z_4$ e $Z_5$ são as raízes da equação $(Z+1)^5 - Z^5 = 0$, e se $R(Z)$ indica a parte real de $Z$ então podemos afirmar que:

(A) $R(Z_K) = 0$ para $K = 1, 2, 3$ e $R(Z_i) = 1$ para $i = 4, 5$.
(B) $R(Z_K) = -\dfrac{1}{2}$ para $K = 1, 2, 3, 4, 5$.
(C) $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$ são números reais (não complexos).
(D) $R(Z_K) = 2$ para $K = 1, 2, 3$ e $R(Z_i) = 0$ para $i = 4, 5$.
(E) NDA.

**Questão 10:** Os lados de dois octógonos regulares têm, respectivamente, 5 cm e 12 cm. O comprimento do lado de um terceiro octógono regular, de área igual à soma das áreas dos outros dois, é:

(A) 17 cm. (B) 15 cm. (C) 14 cm. (D) 13 cm. (E) NDA.

**Questão 11:** Admitindo-se que o polinômio $P(y) = y^5 - (\operatorname{tg} u)^2 y^4 + (\operatorname{tg} u)y + \sec^2 u - \operatorname{tg}^2 u$ é divisível pelo polinômio $Q(y) = y + \operatorname{cotg}^2 u - \operatorname{cosec}^3 u$, onde $\frac{\pi}{2} < u < \pi$, podemos assegurar que:

(A) $\operatorname{tg} u$ é um número irracional negativo.
(B) $\operatorname{cosec} u = -\sec u$.
(C) $u = \frac{2\pi}{3}$.
(D) $\operatorname{tg} u$ é um número tal que $-1 < \operatorname{tg} u < 0$.
(E) NDA.

**Questão 12:** Se $Z_1$ e $Z_2$ são números complexos, $Z_1 + Z_2$ e $Z_1.Z_2$ são ambos reais, então podemos afirmar que

(A) $Z_1$ e $Z_2$ são ambos reais ou $Z_1 = \overline{Z_2}$.
(B) $Z_1$ e $Z_2$ são números complexos não reais.
(C) $Z_1$ e $Z_2$ são números reais irracionais.
(D) $Z_1$ é um número complexo puro e $Z_2$ é número real.
(E) NDA.

**Questão 13:** Consideremos uma esfera de raio $r = 1$ cm e um ponto $P$ fora desta esfera. Sabemos que a distância deste ponto $P$ à superfície da esfera mede 2 cm. Qual é a razão $K$ entre a área da superfície da esfera e a da calota visível do ponto $P$?

(A) $K = 1$. (B) $K = 2$. (C) $K = 3$. (D) $K = \frac{5}{2}$. (E) NDA.

**Questão 14:** Seja $S$ o conjunto das soluções do sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} &2x + y - 3 > 0 \\ &x - 2y + 1 < 0 \\ &y - 3 < 0 \\ &x + my - 5 < 0 \end{aligned}$$

onde $m$ é real. A representação geométrica de $S$, em coordenadas cartesianas ortogonais $(x, y)$, é:

(A) um quadrilátero para qualquer $m > 0$.
(B) um triângulo isósceles para qualquer $m < 0$.
(C) um triângulo retângulo para $m < 0$ ou $\frac{5}{3} < m < 4$.
(D) $S$ é o conjunto vazio para $m > \frac{5}{3}$.
(E) NDA.

**Questão 15:** Sendo $a, b, c, d$ as raízes da equação $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$, podemos afirmar que:

(A) $a, b, c, d$ são reais positivas.

(B) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é igual a $\frac{13}{5}$.

(C) $a, b, c, d$ não são reais.

(D) $\frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc}$ é a soma das raízes.

(E) NDA.

**Questão 16:** As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são $(\operatorname{sen} x)$ cm e $(\cos x)$ cm. Um estudante calculou o volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa, e obteve como resultado $\pi$ cm$^3$. Considerando este resultado como certo, podemos afirmar que:

(A) $x = \frac{\pi}{6}$. (B) $x = \frac{\pi}{3}$. (C) $x = \frac{\pi}{4}$. (D) $x = \frac{\pi}{5}$. (E) NDA.

**Questão 17:** Sejam as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $m$ um número real. Seja: $AX = mX$. Então podemos afirmar que:

(A) Se $\det(A - mI) \neq 0$, então $x + y = 0$ e $x.y \neq 0$.

(B) Se $\det(A - mI) = 0$, então existem dois números reais $x, y$ tais que $x + y \neq 0$ ou $x.y \neq 0$.

(C) Se $\det(A - mI) = 0$, então $\det A = 0$ e $m = 0$.

(D) Se $\det A = 0$, então não existem dois números reais $x, y$ tais que $AX = mX$.

(E) NDA.

**Questão 18:** As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números $\log_e t$, $\log_e t^2$ e $\log_e t^4$ e a área total é 792 cm$^2$. Sabendo-se que a soma das dimensões vale 12 vezes a razão de proporcionalidade, quais são os valores destas dimensões?

(A) 6, 12 e 18. (B) 5, 10 e 15. (C) 2, 3 e 4. (D) 2, 4 e 8. (E) NDA.

**Questão 19:** O número de soluções inteiras e não negativas da equação: $x + y + z + t = 7$ é:

(A) $\binom{7}{4}$. (B) $\binom{11}{4}$. (C) $\binom{10}{3}$. (D) $\binom{11}{3}$. (E) NDA.

**Questão 20:** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência. Sabe-se que $\hat{A} = 2\hat{C}$, $\hat{B} > \hat{D}$ e $\operatorname{tg}\hat{B}.\operatorname{tg}\hat{D} + \operatorname{sen}\hat{A}.\operatorname{sen}\hat{C} = -\frac{9}{4}$. Neste caso, os valores de $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ são, respectivamente:

(A) $150°, 45°, 75°, 30°$. (B) $90°, 120°, 45°, 60°$.
(C) $120°, 150°, 60°, 30°$. (D) $120°, 120°, 60°, 60°$. (E) NDA.

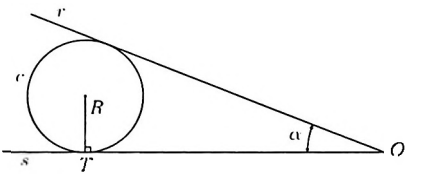
**Questão 21:** Num triângulo escaleno $ABC$, os lados opostos aos ângulos $A, B, C$ medem, respectivamente, $a, b, c$. Então a expressão: $a\operatorname{sen}(B-C) + b\operatorname{sen}(C-A) + c\operatorname{sen}(A-B)$ tem um valor que satisfaz uma das seguintes alternativas:

(A) $a\operatorname{sen}A + b\operatorname{sen}B + c\operatorname{sen}C$. (B) $\operatorname{sen}^2\hat{A} + \operatorname{sen}^2\hat{B} + \operatorname{sen}^2\hat{C}$.
(C) 0. (D) 1. (E) NDA.

**Questão 22:** Considere a circunferência $C$ que passa pelos pontos $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$ em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Uma das retas tangentes a esta circunferência, que passa pelo ponto $(3,5)$, tem por equação

(A) $x + y - 3 = 0$. (B) $7x - y + 8 = 0$.
(C) $x - y + 2 = 0$. (D) $6x - y - 16 = 0$. (E) NDA.

**Questão 23:** Se, na figura *abaixo*, $c$ é uma circunferência de raio $R$, $r$ e $s$ são retas tangentes à circunferência e $\overline{OT} = 2R$ então o ângulo $\alpha$ das retas $r$ e $s$ deve verificar uma das alternativas seguintes:




(A) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. (B) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$.
(C) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. (D) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$. (E) NDA.

**Questão 24:** A respeito da equação exponencial $4^x + 6^x = 9^x$ podemos afirmar que:

(A) $x = 9\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ é uma raiz.

(B) $x = \left[\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ é uma raiz.

(C) $x = \left[\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ é uma raiz.

(D) $x = \left[\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)$ é uma raiz.

(E) NDA.

**Questão 25:** Seja $S = \log_4(\operatorname{tg} x_1) + \log_4(\operatorname{tg} x_2) + \log_4(\operatorname{tg} x_3) - \ldots$ onde $x_1 = \frac{\pi}{3}$ e $x_{n+1} = \operatorname{arc\,tg}\{\sqrt{\operatorname{tg} x_n}\}$, $n = 2, 3, \ldots$

(A) $S = \log_4(\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_1 + \ldots)$. (B) $S = -1$.
(C) $S = 2$. (D) $S = 1$. (E) NDA.

# I.40 Vestibular 1974

**Questão 01:** Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos contidos num mesmo conjunto $U$. Seja $x$ um elemento de $U$, define-se $\underset{B}{\complement} A = \{x \in U / x \in B \text{ e } x \notin A\}$. Então $\underset{C}{\complement}(A \cup B)$ é igual a:

(A) $\underset{C}{\complement} A \cup \underset{C}{\complement} B$. (B) $\underset{C}{\complement} A \cap \underset{C}{\complement} B$. (C) $\underset{A}{\complement} B$. (D) O conjunto vazio. (E) n.d.a.

**Questão 02:** Sejam $A$, $B$ e $D$ subconjuntos não vazios do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Sejam as funções $f : A \to B\,(y = f(x))$, $g : D \to A\,(x = g(t))$, e a função composta $(g \circ f) : E \to K$ (e, portanto $Z = (g \circ f)(t) = g(f(t))$. Então os conjuntos $E$ e $K$ são tais que:

(A) $E \subset A$ e $K \subset D$. (B) $E \subset B$ e $K \supset A$. (C) $E \supset D$, $D \neq E$ e $K \subset B$.
(D) $E \subset D$ e $K \subset B$. (E) n.d.a.

**Questão 03:** O volume de um tetraedro regular de aresta igual a $\ell$ é:

(A) $\ell\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$. (C) $\dfrac{\ell^2\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{\ell^3\sqrt{3}}{2}$. (E) n.d.a.

**Questão 04:** Seja $a > 0$ o 1º termo de uma progressão aritmética de razão $r$ e também de uma progressão geométrica de razão $q = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3a}$. A relação entre $a$ e $r$ para que o terceiro termo da progressão geométrica coincida com a soma dos 3 primeiros termos da progressão aritmética é:

(A) $r = 3a$. (B) $r = 2a$. (C) $r = a$. (D) $r = \sqrt{2a}$. (E) n.d.a.

**Questão 05:** Sobre a raiz da equação $3^x - \dfrac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \dfrac{23}{3^{x-2}}$ podemos afirmar:

(A) não é real. (B) é menor que $-1$. (C) está no intervalo $[0, 6]$.
(D) é um número primo. (E) n.d.a.

**Questão 06:** A condição para que $\binom{n}{k}$ seja o dobro de $\binom{n}{k-1}$ é que:

(A) $n - 1$ seja múltiplo de 3. (B) $n$ seja divisível por 3.
(C) $n - 1$ seja par. (D) $n = 2k$. (E) n.d.a.

**Questão 07:** Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então temos:

(A) $BA = I$. (B) $BA = AB$. (C) $A = 2B$. (D) $AI = BZ$. (E) n.d.a.

**Questão 08:** Seja a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & -22 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podemos afirmar:

(A) a equação tem uma e somente uma solução.
(B) a equação tem duas e somente duas soluções.
(C) a equação tem três e somente três soluções.
(D) a equação não tem solução.
(E) n.d.a.

**Questão 09:** O valor da expressão $x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}(\theta)}{1 - \mathrm{tg}^2(\theta)}$ quando $\cos\theta = -\dfrac{3}{7}$ e $\mathrm{tg}\,\theta < 0$ é:

(A) $\dfrac{4\sqrt{10}}{31}$. (B) $-\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{10}}{15}$. (D) $\dfrac{3\sqrt{10}}{7}$. (E) n.d.a.

**Questão 10:** $\left(\dfrac{1 - \mathrm{tg}\,x}{1 + \mathrm{tg}\,x}\right)^2$ vale:

(A) $\dfrac{1 - 2\,\mathrm{sen}\,2x}{1 + \mathrm{sen}\,2x}$. (B) $\dfrac{1 + 2\,\mathrm{sen}\,2x}{1 - \mathrm{sen}\,2x}$.

(C) $\dfrac{1 + \mathrm{sen}\,2x}{1 - \mathrm{sen}\,2x}$. (D) $\dfrac{1 - \mathrm{sen}\,2x}{1 - \mathrm{sen}\,2x}$. (E) n.d.a.

**Questão 11:** Seja $m(\overline{BC}) = m(\overline{CD})$ no quadrilátero $ABCD$, mostrado na figura abaixo. Então podemos garantir que:

(A) $\dfrac{\mathrm{sen}\,\gamma}{\mathrm{sen}\,\delta} = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\beta}$. (B) $\gamma \cdot \beta = \alpha \cdot \delta$.

(C) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,\gamma \cdot \mathrm{tg}\,\delta$. (D) $[m(\overline{BC})]^2 = m(\overline{AD}) \cdot m(\overline{AB})$. (E) n.d.a.

**Questão 12:** A reta que passa pelas interseções das circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ é tal que:
(A) tem equação $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{4} = 0$.
(B) não passa pela origem.
(C) passa pela origem.
(D) não é perpendicular à reta que passa pelos centros das circunferências.
(E) n.d.a.

**Questão 13:** Os zeros da função $P(x) = 3x^6 - 8x^5 + 3x^4 + 2x^3$ são:
(A) todos inteiros.
(B) 2 imaginários puros e 4 reais.
(C) todos racionais.
(D) 4 racionais e 2 irracionais.
(E) n.d.a.

**Questão 14:** A equação $x^n - 1 = 0$, onde $n$ é um número natural maior do que 5, tem:
(A) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n-2)$ raízes complexas quando $n$ é par.
(B) 1 raiz positiva, $(n-1)$ raízes não reais quando $n$ é par.
(C) 1 raiz negativa, $(n-1)$ raízes complexas quando $n$ é ímpar.
(D) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n-2)$ raízes complexas quando $n$ é um número natural qualquer.
(E) n.d.a.

**Questão 15:** O valor absoluto da soma das duas menores raízes da equação $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 1$ é:
(A) 2. (B) 3. (C) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. (D) 4. (E) n.d.a.

**Questão 16:** Se $a$, $b$ e $c$ são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, então o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ é:
(A) $\frac{1}{4}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{3}{2}$. (E) n.d.a.

**Questão 17:** O conjunto de todos os valores de $x$ para os quais existe um $y$ real de modo que $y = \log_{10}\left[\log_{10}\left(\frac{7 - 2x - x^2}{3 - 4x^2}\right)\right]$ é dado por:

(A) intervalo aberto $A$, de extremos $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.
(B) intervalo aberto $A$, de extremos $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.
(C) intervalo aberto $A$, de extremos $0$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(D) intervalo aberto $A$, de extremos $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $1$.
(E) n.d.a.

**Questão 18:** Um lado de um triângulo $ABC$ mede $\ell$ cm. Os valores dos ângulos e dos lados do triângulo formam duas progressões aritméticas. A área $S$ desse triângulo é:

(A) $\ell^2(\sqrt{3}+1)$ cm². (B) $\ell^2(\sqrt{3}-1)$ cm².
(C) $\ell^2\sqrt{3}$ cm². (D) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ cm². (E) n.d.a.

**Questão 19:** Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais, o maior valor de $n$ tal que as igualdades *abaixo* são verdadeiras é:

$$\log_{10} 123478 = a_1$$
$$\log_{10} a_1 = a_2$$
$$\ldots$$
$$\log_{10} a_{n-1} = a_n$$

(A) $n = 3$. (B) $n = 4$. (C) $n = 5$. (D) $n = 6$. (E) n.d.a.

**Questão 20:** Seja $M = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, onde $a$, $b$ e $c$ são as raízes da equação $x^3 - \sqrt{3}x^2 + 54 = 0$. Então podemos afirmar que:

(A) $\log_3 M$ é um número irracional.
(B) $\log_3 M$ é um número primo.
(C) $\log_3 M = \frac{5}{3}$.
(D) $\log_3 M = -\frac{5}{2}$.
(E) n.d.a.

**Questão 21:** Deseja-se construir uma ferrovia ligando o ponto $A$ ao ponto $B$ que está $40\sqrt{2}$ km a sudeste de $A$. Um lado, na planície onde estão $A$ e $B$, impede a construção em linha reta. Para contornar o lago, a estrada será construída em 2 trechos retos com o vértice no ponto $C$, que está 36 km a leste e 27 km ao sul de $A$. O comprimento do trecho $\overline{CB}$ é:

(A) $\sqrt{182}$. (B) $\sqrt{183}$. (C) $\sqrt{184}$. (D) $\sqrt{185}$. (E) n.d.a.

**Questão 22:** O conjunto dos valores de $k$, para os quais $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tem um ou três zeros reais entre 1 e 2, é:

(A) $k < 2$. (B) $1 < k < 2$. (C) $2 > k$ ou $k > 6$. (D) $k > 7$. (E) n.d.a.

**Questão 23:** Seja $c$ um quarto de circunferência $AB$ de raio $R$ e centro $O$, e seja $t$ a reta tangente a $c$ em $A$. Traça-se pelo centro $O$ de $c$ uma reta que corta $c$ num ponto $M$ e corta a reta tangente num ponto $N$, distintos de $A$. Seja $k$ a razão entre o volume gerado pelo setor $OAM$ e o volume gerado pelo triângulo $OAN$, ambos obtidos girando-se de $2\pi$ em torno de $\overline{AO}$. O comprimento do segmento $\overline{AN}$ é igual ao raio $R$ se:

(A) $1 < k < 2.5$. (B) $2.5 \leq k \leq 3$. (C) $0 < k \leq 2$. (D) $0 < k < 1.5$. (E) n.d.a.

**Questão 24:** Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio 4 cm. Cortam-se os sólidos (esfera e cone) por um plano paralelo à base, de modo que a diferença entre as áreas das secções seja igual à área da base do cone. O raio da secção do cone é:

(A) $2\sqrt{3}$ cm. (B) $\sqrt{3}$ cm. (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm. (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. (E) n.d.a.

**Questão 25:** Seja $z_K$ um número complexo, solução da equação $(z+1)^5 + z^5 = 0$, $K = 0, 1, 2, 3, 4$. Podemos afirmar que:

(A) todos os $z_K$, $K = 0, 1, 2, 3, 4$, estão sobre uma circunferência.
(B) todos os $z_K$, $K = 0, 1, 2, 3, 4$, estão sobre uma reta paralela ao eixo real.
(C) todos os $z_K$, $K = 0, 1, 2, 3, 4$, estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário.
(D) a equação não admite solução.
(E) n.d.a.

# I.41 Vestibular 1973

**Questão 01:** Sabe-se que a média harmônica entre o raio e a altura de um cilindro de revolução vale 4. Quanto valerá a relação do volume para a área total deste cilindro?

(A) 1. (B) 2. (C) 2,5. (D) 3. (E) n.d.a.

**Questão 02:** O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece a função $X(t) = Ce^{kt}$, onde $X(t)$ é o número de bactérias no tempo $t > 0$; $C$ e $k$ são constantes positivas, $e$ é a base do logaritmo neperiano. Verificando-se que o número inicial de bactérias $X(0)$ duplica em 4 horas, quantas bactérias se pode esperar no fim de 6 horas?

(A) 3 vezes o número inicial. (B) 2,5 vezes o número inicial.
(C) $2\sqrt{2}$ vezes o número inicial. (D) $2\sqrt[3]{2}$ vezes o número inicial. (E) n.d.a.

**Questão 03:** Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos $A$, $B$ e $C$. O comandante quando o navio está em $A$ observa um farol em $L$ e calcula o ângulo $LÂC = 30°$. Após navegar 4 milhas até $B$, verifica o ângulo $LBC = 75°$. Quantas milhas separam o farol do ponto $B$?

(A) 4. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 8/3. (D) $\sqrt{3}/2$. (E) n.d.a.

**Questão 04:** Consideremos um cone de revolução de altura $h$ e um cilindro nele inscrito. Seja $d$ a distância do vértice do cone à base superior do cilindro. A altura $H$ de um segundo cilindro inscrito neste cone (diferente do primeiro) e de mesmo volume do primeiro é dada por:

(A) $H = \dfrac{(h - \sqrt{h \quad d})}{3}$.

(B) $H = \dfrac{(h \pm \sqrt{h^2 - d^2})}{3}$.

(C) $H = \dfrac{(h - d \pm h\sqrt{h^2 - d^2})}{2}$.

(D) $H = \dfrac{(h + d - \sqrt{(h - d)(h + 3d)})}{2}$.

(E) n.d.a.

**Questão 05:** O coeficiente de $a^{n-1-p}b^p$ no produto de: $a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \ldots + \binom{k}{p}a^{k-p}b^p + \ldots + b^k$ por $(a+b)$, se $k = n$, vale:

(A) $\binom{n}{p}$. (B) $\binom{n+1}{p}$. (C) $\binom{n-1}{p}$. (D) $\binom{n+1}{p+1}$. (E) n.d.a.

**Questão 06:** A desigualdade $\sqrt[3]{x}.\sqrt{x} \leq \frac{1}{x}$ é válida para:

(A) qualquer $x$ positivo. (B) $1 \leq x < 3$.
(C) $0 < x \leq 1$ ou $2 \leq x \leq 3$. (D) $0 < x \leq 1$ ou $2 \leq x < 3$. (E) n.d.a.

**Questão 07:** Suponhamos que $p$ e $q$ são os catetos de um triângulo retângulo e $h$ a altura relativa à hipotenusa do mesmo. Nestas condições, podemos afirmar que a equação $\frac{2}{p}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{q} = 0$:

(A) não admite soluções reais.
(B) admite uma raiz da forma $m\sqrt{-1}$, onde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.
(C) admite sempre raízes reais.
(D) admite uma raiz da forma $-m\sqrt{-1}$, onde $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.
(E) n.d.a.

**Obs.:** $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

**Questão 08:** A respeito da equação $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$ podemos dizer:

(A) $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$ são raízes.
(B) a única raiz real é $x = 3$.
(C) a única raiz real é $x = 2 + \sqrt{10}$.
(D) tem duas raízes reais e imaginárias.
(E) n.d.a.

**Questão 09:** A base $\overline{AB}$ de uma folha de papel triangular que está sobre uma mesa mede 12 cm. O papel é dobrado levantando-se sua base, de modo que a dobra fique paralela à mesma. A área da parte do triângulo que fica visível após o papel ter sido dobrado, vale 0,30 da área do triângulo $ABC$. O comprimento da dobra vale:

(A) 9,6 cm. (B) 9,4 cm. (C) 10 cm. (D) 8 cm. (E) n.d.a.

**Questão 10:** Os valores de $x$ que verificam a desigualdade $\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\log_x e - 1} > 1$ são:

(A) $x > 1$. (B) $x > e$. (C) $0 < x < e$. (D) $1 < x < e$. (E) n.d.a.

**Questão 11:** Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ onde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Então $\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p-n}(-1)^p(-1)^{n-p}\binom{n}{p}$ vale:

(A) $-1$. (B) 0. (C) 1. (D) 2. (E) n.d.a.

**Questão 12:** A desigualdade $a^3 + \frac{1}{a^3} > a^2 + \frac{1}{a^2}$ é verdadeira se:

(A) $|a| > 1$. (B) $a \neq 1, a \neq 0$. (C) $a > 0, a \neq 1$. (D) $|a| < 1, a \neq 0$. (E) n.d.a.

**Questão 13:** Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Os momentos destas ocorrências serão:

(A) $4\text{h}\,5\frac{2}{11}$ min e $4\text{h}\,38\frac{5}{11}$ min. (B) $4\text{h}\,5\frac{5}{11}$ min e $4\text{h}\,38\frac{2}{11}$ min.

(C) $4\text{h}\,5\frac{5}{11}$ min e $4\text{h}\,38\frac{5}{12}$ min. (D) $4\text{h}\,5\frac{3}{11}$ min e $4\text{h}\,38\frac{7}{11}$ min. (E) n.d.a.

**Questão 14:** Seja a equação do 4º grau $x^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, onde $q$, $r$, $s$ e $t$ são números racionais não nulos tais que: $L$, $M$, $N$ e $P$ são raízes reais dessa equação. O valor de $\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN}$ é:

(A) $\frac{(q^2 - 2r)}{t}$. (B) $\frac{(q^2 - r + s)}{t}$. (C) $\frac{(q^2 - r)}{t}$. (D) $\frac{q}{r} + \frac{r}{s} + \frac{s}{t} + \frac{t}{q}$. (E) n.d.a.

**Questão 15:** Um octaedro regular é inscrito num cubo, que está inscrito numa esfera, e que está inscrita num tetraedro regular. Se o comprimento da aresta do tetraedro é 1, qual é o comprimento da aresta do octaedro?

(A) $\sqrt{\frac{2}{27}}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. (D) $\frac{1}{6}$. (E) n.d.a.

**Questão 16:** Certa liga contém 20% de cobre e 5% de estanho. Quantos quilos de cobre e quantos quilos de estanho devem ser adicionados a 100 quilos dessa liga para a obtenção de uma outra com 30% de cobre e 10% de estanho? (Todas as percentagens em kg).

(A) 8 kg de cobre e 6 kg de estanho.
(B) 17,50 kg de cobre e 7,5 kg de estanho.
(C) 18 kg de cobre e 7,5 kg de estanho.
(D) 17,50 kg de cobre e 7,8 kg de estanho.
(E) n.d.a.

**sln:** A sentença "Todas as percentagens em kg" não tem sentido físico.

**Questão 17:** A lei de decomposição do radium no tempo $t \geq 0$ é dada por $M(t) = Ce^{-kt}$, onde $M(t)$ é a quantidade de radium no tempo $t$, $C$ e $k$ são constantes positivas e $e$ é a base do logaritmo neperiano. Se a metade da quantidade primitiva $M(0)$ desaparece em 1600 anos, qual a quantidade perdida em 100 anos?

(A) $(1 - 100^{-1})$ da quantidade inicial.
(B) $(1 - 2^{-6})$ da quantidade inicial.
(C) $(1 - 2^{-16})$ da quantidade inicial.
(D) $(1 - 2^{\frac{-1}{16}})$ da quantidade inicial.
(E) n.d.a.

**Questão 18:** Seja a equação $(\ln m)\operatorname{sen} x \pm \cos x = \ln m$. Quais as condições sobre $m$ para que a equação dada admita solução?

(A) $m > 0$ se $x = (2k + 1/2)\pi$; $m > 0$ e $m \neq 1$ se $x \neq (2k + 1/2)\pi$.
(B) $m \neq 0$ se $x = (2k + 1/2)\pi$; $m \geq 0$ e $m \neq e$ se $x \neq (2k + 1/2)\pi$.
(C) $m > e$ se $x = (2k + 1/2)\pi$; $m \geq 1$ se $x \neq (2k + 1/2)\pi$.
(D) $m > -1/e$ e $m \neq 0$ se $x = (2k + 1/2)\pi$; $m \neq 0$ se $x \neq (2k + 1/2)\pi$.
(E) n.d.a.

**Questão 19:** Eliminando $\theta$ nas equações $\begin{cases} x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta = 2a\operatorname{sen}\theta \\ x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta = a\cos\theta \end{cases}$, $a > 0$, temos:

(A) $(x + y)^{\frac{4}{3}} - (x - y)^{\frac{4}{3}} = 2a(x + y)^2$.
(B) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = (x + y)a$.
(C) $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.
(D) impossível eliminar $\theta$.
(E) n.d.a.

**Questão 20:** Um cliente deposita num fundo de investimento Cr$ 1.000,00 anualmente, durante 5 anos. Seu capital, no final de cada ano, é acrescido de 10%. No final de 5 anos seu capital acumulado será Cr$:

(A) 6.715,00. (B) 6.715,62. (C) 6.715,60. (D) 6.715,61. (E) n.d.a.

**Questão 21:** Durante o eclipse total do sol de 07 de março de 1970 a largura da faixa de escuridão total foi de 100 km. Em cada ponto do eixo central desta faixa, a duração do período de escuridão total foi de 3 minutos. Qual foi a duração deste período num ponto situado a 10 km do limite da faixa de escuridão total?

(A) 1 min. 36 seg. (B) 1 min. 48 seg. (C) 1 min. 30 seg.
(D) 0 min. 36 seg. (E) n.d.a.

**Questão 22:** Seja e equação: $3\,\mathrm{tg}\,3x = [3(\ln t)^2 - 4\ln t + 2]\,\mathrm{tg}\,x$, $x \neq n\pi$. Quais as condições sobre $t$ para que a equação acima admita solução?
(A) $0 < t < 1/e$ ou $e^{1/3} < t < e$ ou $t > e^{7/3}$.
(B) $e^{1/3} \leq t \leq e^{3/2}$ ou $0 < t < e$.
(C) $e^{1/3} < t \leq e^{2/3}$ ou $1/e > t$.
(D) $t > 0$ e $t \neq 1$.
(E) n.d.a.

**Questão 23:** Seja $L$ o comprimento do eixo de uma caldeira cilíndrica terminada por duas semi-esferas. Sabe-se que a área da superfície total da caldeira é $4\pi k^2$, com $0 < k < L/2$. As dimensões da parte cilíndrica da caldeira valem:
(A) $k^2/L$ e $L + 3k^2/L$. (B) $k^2/L$ e $k + (3/4)L$.
(C) $2k^2/L$ e $L - 4k^2/L$. (D) $k^2/2L$ e $L + (4/2)k^2$. (E) n.d.a.

**Questão 24:** Seja $S$ uma semi-esfera de raio $R$ dado. Sejam $p$ e $q$ dois planos paralelos e distantes entre si $R/2$ e tais que interceptem $S$ paralelamente à sua base. Seja $T$ o troco de cone com bases $b$ e $c$, onde $b$ e $c$ são as interseções de $p$ e $q$ com $S$. Seja $x$ o valor da menor das distâncias $d$ e $D$, onde $d$ é a distância entre $p$ e a base de $S$ e $D$ é a distância entre $q$ e a base de $S$. Seja $k = \left\{(R^2 - x^2)\left[R^2 - \left(x + \frac{R}{2}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$. Então o volume de $T$, como função de $x$, $0 \leq x \leq R/2$, vale:
(A) $\frac{\pi R}{6}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx + k\right)$.
(B) $\frac{\pi R}{12}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx + k\right)$.
(C) $\frac{\pi R}{12}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx - k\right)$.
(D) $\frac{\pi R}{6}\left(\frac{7}{4}R^2 - 2x^2 - Rx - k\right)$.
(E) n.d.a.

**Questão 25:** A solução da equação: $\log_u \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2(k+1)!}\right)\right] \cdot x = 1$, $n =$ número inteiro positivo dado, com $u = \frac{1}{(n+2)!}$, é:
(A) $\frac{2}{[(n+1)! - 1]}$. (B) $\frac{2}{[n(n+1)! - 1]}$.
(C) $\frac{2}{[(n+2)! - (n+2)]}$. (D) $\frac{[(n+1)! - 1]}{2n}$. (E) n.d.a.

# I.42 Vestibular 1972

**Questão 01:** O ângulo convexo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos às 10 horas e 15 minutos é:
(A) $142°30'$. (B) $142°40'$. (C) $142°$. (D) $141°30'$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 02:** Todas as raízes reais da equação: $\sqrt{\frac{x^2+3}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2+3}} = \frac{3}{2}$ são:
(A) $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$. (B) $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$. (C) $x_1 = 3$ e $x_2 = \sqrt{3}$.
(D) não tem raízes reais.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 03:** Todas as raízes reais da equação: $x^{-1} + 4x^{-\frac{1}{2}} + 3 = 0$ são:
(A) $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$. (B) $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1/3$. (C) $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$.
(D) não tem raízes reais.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 04:** Qual é a relação que $a$, $b$ e $c$ devem satisfazer tal que o sistema abaixo tenha pelo menos uma solução?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x + 2y + 7z = c \end{cases}$$

(A) $5a = 2b - c$. (B) $5a = 2b + c$. (C) $5a \neq 2b + c$.
(D) não existe relação entre $a$, $b$ e $c$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 05:** Assinale a sentença correta.
(A) $a > 1$, $\log_a x < 0$ se $x > 1$, $\log_a x > 0$ se $x < 1$.
(B) $0 < a < 1$, $\log_a x > 0$ se $x < 1$, $\log_a x < 0$ se $x > 1$.
(C) $a > 1$, $\log_a x_1 < \log_a x_2$ se, e só se, $x_1 > x_2$.
(D) $0 < a < 1$, $\log_a x_1 > \log_a x_2$ se, e só se, $x_1 < x_2$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 06:** Assinale uma solução para a equação trigonométrica $\sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{3}$.

(A) $x = 2k\pi - \pi/6$. (B) $x = 2k\pi + \pi/6$.
(C) $x = 2k\pi + \pi/2$. (D) $x = 2k\pi - \pi/2$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 07:** Qual é o valor de $m$ para que: $\dfrac{C_m^3}{C_{m-1}^3} = \dfrac{7}{4}$?

(A) $m = 8$. (B) $m = 10$. (C) $m = 6$. (D) $m = 5$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 08:** Consideremos duas retas $r_1$ e $r_2$ ortogonais não situadas num mesmo plano, e um segmento $\overline{XY}$ de comprimento constante que desliza suas extremidades sobre essas retas. O lugar geométrico das intersecções dos planos construídos perpendicularmente a essas retas $r_1$ e $r_2$ nas extremidades do segmento $\overline{XY}$ é:

(A) uma reta perpendicular ao segmento $\overline{XY}$.
(B) a superfície cilíndrica de revolução tendo como diretriz a parábola.
(C) a superfície cilíndrica de revolução tendo como diretriz a elipse.
(D) a superfície cilíndrica de revolução tendo como diretriz a hipérbole.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 09:** Dado um cilindro de revolução de raio $r$ e altura $h$. Sabendo-se que a média harmônica entre o raio $r$ e a altura $h$ é 4 e que sua área total é $2\pi$ u.a., o raio $r$ deve satisfazer a relação:

(A) $r^3 - r + 2 = 0$. (B) $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$.
(C) $r^3 - r^2 - r + 1 = 0$. (D) $r^3 - 3r - 3 = 0$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 10:** Seja $\overline{B'C'}$ a projeção do diâmetro $\overline{BC}$ de um círculo de raio $r$ sobre a reta tangente $t$ por um ponto $M$ deste círculo. Seja $2k$ a razão da área total do tronco do cone gerado pela rotação do trapézio $BCB'C'$ ao redor da reta tangente $t$ e a área do círculo dado. Qual é o valor de $k$ para que a medida do segmento $\overline{MB'}$ seja igual à metade do raio $r$?

(A) $k = 11/3$. (B) $k = 15/4$. (C) 2. (D) $k = 1/2$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 11:** Seja a equação: $3^{(\ln x)+1} - 3^{(\ln x)-1} + 3^{(\ln x)-3} - 3^{(\ln x)-4} = \ln \dfrac{\operatorname{sen} a}{e^{-0{,}67}}$. Sabe-se que $\ln x$ é igual à menor raiz da equação $r^2 - 4r - 5 = 0$. O valor de $a$ para que a equação seja verificada é:

(A) $a = 3\pi/2$. (B) $a = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $a = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{1}{e^3}$. (D) $a = \operatorname{arc\,sen} e$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 12:** Quais os valores de $\alpha$ de modo que o sistema

$$\begin{cases} (\operatorname{sen}\alpha - 1)x + 2y - (\operatorname{sen}\alpha)z = 0 \\ (3\operatorname{sen}\alpha)y + 4z = 0 \\ 3x + (7\operatorname{sen}\alpha)y + 6z = 0 \end{cases}$$

admita soluções não triviais?

(A) $\alpha = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
(B) $\alpha = n\pi + \pi/3$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
(C) $\alpha = n\pi + \pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
(D) não há valores de $\alpha$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 13:** As dimensões de um paralelepípedo retângulo estão em progressão geométrica e a sua soma vale $s$. Sabendo-se que seu volume é $v^3$, $s \geq 3v$, então duas de suas dimensões são:

(A) $\dfrac{s + v \pm \sqrt{(s+v)^2 - v^2}}{2}$.
(B) $s - v$ e $s + v$.
(C) $v \pm \sqrt{(s-v)^2 - 4v^2}$.
(D) $\dfrac{s - v \pm \sqrt{(s-v)^2 - 4v^2}}{2}$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 14:** Construindo-se um prisma e uma pirâmide sobre uma mesma base de área $A$ e volumes $V_1$ e $V_2$, a área da secção da pirâmide com a outra base do prisma é:

(A) $A\dfrac{V_1}{V_1 + V_2}$. (B) $\dfrac{V_2 - V_1}{AV_2}$. (C) $A\left(1 - \dfrac{V_1}{3V_2}\right)$. (D) $A\dfrac{3V_2 - V_1}{V_2}$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 15:** Para todo $\alpha$ e $\beta$, $|\beta| < 1$, a expressão $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}\alpha + \operatorname{arc\,sen}\beta)$ é igual a:

(A) $-\dfrac{\beta + \alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\alpha\beta - \sqrt{1-\beta^2}}$.
(B) $\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta + \sqrt{1-\beta^2}}$.
(C) $\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta\sqrt{1-\beta^2} - 1}$.
(D) $\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}(\alpha - \beta)}{\alpha\beta - 1}$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 16:** A soma dos quadrados das raízes da equação $2x^4 - 8x^2 - 60x + k = 0$ ($k$ constante) é:

(A) $76 + k^2$. (B) $(34 + k)^2$. (C) 66. (D) 76.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 17:** Seja $f(x) = x^2 + px + p$ uma função real de variável real. Os valores de $p$ para os quais $f(x) = 0$ possua raiz dupla positiva são:
(A) $0 < p < 4$. (B) $p = 4$. (C) $p = 0$.
(D) $f(x) = 0$ não pode ter raiz dupla positiva.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 18:** O volume do sólido gerado por um triângulo, que gira em torno de sua hipotenusa e cujos catetos são 15 cm e 20 cm, é:
(A) $1080\pi$ cm$^3$. (B) $960$ cm$^3$. (C) $1400$ cm$^4$. (D) $1600\pi$ cm$^3$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 19:** Seja a equação: $3 \operatorname{tg} 3x = [3(\ln k)^2 - 4 \ln k + 2] \operatorname{tg} x$. Para que intervalo de valores de $k$ abaixo, a equação dada admite solução?
(A) $0 < k \leq e^{1/3}$. (B) $0 < k \leq e^{2/3}$. (C) $0 < k \leq e^{-1}$. (D) $0 < k \leq e^{7/3}$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 20:** Seja a equação $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio de grau $m$. Se $P(x)$ admite uma raiz inteira, então $P(-1).P(0).P(-1)$ necessariamente:
(A) vale 5. (B) vale 3. (C) é divisível por 5. (D) é divisível por 3.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 21:** Seja $A$ um conjunto finito com $m$ elementos e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. O número de todas as funções definidas em $I_n$ com valores em $A$ é:
(A) $C_m^n$. (B) $m.n$. (C) $n^m$. (D) $m^n$. (E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 22:** Sejam $m \leq n$, $I_m = \{1.2\ldots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. O número de funções biunívocas definidas em $I_m$ com valores em $I_n$ é:
(A) $A_m^n$. (B) $C_m^n$. (C) $\dfrac{m!}{n!}$. (D) $m.n$. (E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 23:** Seja $\theta = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{b}{a}$, com $|a| > |b|$. Então $2\theta$ vale:
(A) $\operatorname{arc} \left(2 \operatorname{sen} \dfrac{a}{b}\right)$. (B) $\operatorname{arc\,sen} \left(\dfrac{2b}{a}\right)$.
(C) $\operatorname{arc\,sen} \left(\dfrac{2a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right)$. (D) $\operatorname{arc\,sen} \left(\dfrac{2b}{a^2}\sqrt{a^2 - b^2}\right)$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 24:** Quais condições devem satisfazer $a$ e $k$ para que a seguinte igualdade tenha sentido? $\log(\sec a) = k$

(A) $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, $k \geq 0$.
(B) $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, $k < 0$.
(C) $-\frac{\pi}{2} < a \leq \frac{\pi}{2}$, $k > 0$.
(D) $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{2}$, $k \geq 0$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 25:** Consideremos a função $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} x)^n$, onde $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Para que valores de $x$, $10 \leq S(x) \leq 20$?

(A) $\operatorname{arc\,sen} \frac{9}{10} \leq x \leq \operatorname{arc\,sen} \frac{19}{20}$.
(B) $\operatorname{arc\,sen} \frac{10}{9} \leq x \leq \operatorname{arc\,sen} \frac{20}{19}$.
(C) $\operatorname{arc\,sen} \frac{10}{11} \leq x \leq \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}}{2}$.
(D) $\operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}}{2}$.
(E) nenhuma das respostas anteriores.

# I.43 Vestibular 1971

**Questão 01:** Qual o resto da divisão por 3 do determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -6 \\ (3-4) & (6-1) & (-3-5) & (9+6) \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(A) 0. (B) 3. (C) 7. (D) 1. (E) N.d.r.a.

**Questão 02:** Sejam $\alpha$ e $\beta$ dois planos não paralelos interceptados ortogonalmente pelo plano $\gamma$. Sejam ainda $r$, $s$ e $t$ respectivamente as intersecções de $\alpha$ e $\beta$, $\alpha$ e $\gamma$ e $\beta$ e $\gamma$. Qual das afirmações abaixo é sempre correta?

(A) $r$, $s$ e $t$ formam oito triedros triretângulos.
(B) Existe um ponto $P$ de $r$ tal que, qualquer reta de $\gamma$ que passa por $P$ é ortogonal a $r$.
(C) $r$ pode não interceptar $\gamma$.
(D) $t$ é perpendicular a $\alpha$.
(E) Nenhuma dessas afirmações é correta.

**Questão 03:** O produto dos termos da seguinte P.G. $-\sqrt{3}$, 3, $-3\sqrt{3}$, ..., $-81\sqrt{3}$ é

(A) $-\sqrt{3^{25}}$. (B) $-\sqrt{3^{42}}$. (C) $-\sqrt{5.3^9}$. (D) $-\sqrt{3^{45}}$. (E) N.d.r.a.

**Questão 04:** Se $f$ é uma função real de variável real dada por $f(x) = x^2$, então $f(x^2 + y^2)$ é igual a:

(A) $f(f(x)) + f(y) + 2f(x)f(y)$ para todo $x$ e $y$.
(B) $f(x^2) + 2f(f(x)) + f(x)f(y)$ para todo $x$ e $y$.
(C) $f(x^2) + f(y^2) + f(x)f(y)$ para todo $x$ e $y$.
(D) $f(f(x)) + f(f(y)) + 2f(x)f(y)$ para todo $x$ e $y$.
(E) $f(f(x)) + 2f(y^2) + 2f(x)f(y)$ para todo $x$ e $y$.

**Questão 05:** Uma solução da equação $24x^5 - 4x^4 + 49x^3 - 2x^2 + x - 29 = 0$ é

(A) $x = \frac{2}{3}$. (B) $x = \frac{11}{12}$. (C) $x = \frac{3}{4}$. (D) $x = \frac{4}{3}$. (E) N.d.r.a.

**Questão 06:** Seja a desigualdade $2(\log x)^2 - \log x > 6$. Determinando-se as soluções desta desigualdade obtemos:

(A) $0 < x < \frac{1}{e}$ e $x > 10^2$. (B) $0 < x < e^{-3/2}$ e $x > e^2$.

(C) $0 < x < e$ e $x < 10$. (D) $\frac{1}{e} < x < 1$ e $x > e$. (E) N.d.r.a.

**Questão 07:** Dados uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, centro $O$, e um ponto $C$ da circunferência, achar o lugar geométrico dos pontos de intersecção do raio $\overline{OC}$ à paralela ao diâmetro $\overline{AB}$ e passando pelo pé da perpendicular a $\overline{AC}$ tirada por $O$.

(A) um segmento de reta paralela a $\overline{AB}$.

(B) uma circunferência de raio $\frac{2R}{3}$ e origem $O$.

(C) uma circunferência de raio $R/2$ e origem $O$.

(D) uma elipse de semi-eixo maior $\overline{OA}$

(E) N.d.r.a.

**sIn:** Creio que os itens (B) e (C) queriam dizer "centro $O$."

**Questão 08:** Consideremos a equação $[\log(\operatorname{sen} x)]^2 - \log(\operatorname{sen} x) - 6 = 0$. A(s) solução(ões) da equação acima é (são) dada(s) por:

(A) $x = \operatorname{arc\,sen}(e^2)$ e $x = \operatorname{arc\,sen}(3)$.

(B) $x = \operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{2})$ e $x = \operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{3})$.

(C) $x = \operatorname{arc\,tg}(e^2)$ e $x = \operatorname{arc\,cos}(3)$.

(D) $x = \operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{e^2})$.

(E) N.d.r.a.

**Questão 09:** Uma progressão geométrica de 3 termos positivos cuja soma é $m$ tem seu segundo termo igual a 1. Que valores deve assumir $m$, para que o problema tenha solução?

(A) $0 < m \leq 1$. (B) $1 \leq m < 3$. (C) $m \geq 3$. (D) $1 \leq m \leq 2$. (E) N.d.r.a.

**Questão 10:** Dada a equação $\log(\cos x) = \operatorname{tg} x$, as soluções desta equação em $x$ satisfazem a relação:

(A) $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$. (B) $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(C) $0 < x < \pi$. (D) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. (E) N.d.r.a.

**Questão 11:** Dado um cone reto de geratriz $g$ e altura $h$, calcular a que distância do vértice deveremos passar um plano paralelo à base, a fim de que a secção obtida seja equivalente à área lateral do tronco formado.

(A) $\sqrt{g(g-h)}$. (B) $\sqrt{g\left(g-\sqrt{g^2-h^2}\right)}$.

(C) $\sqrt{g^2-\sqrt{g^2-h^2}}$. (D) $\sqrt{h^2-g\sqrt{g^2-h^2}}$. (E) N.d.r.a.

**Questão 12:** O sistema de desigualdades $\begin{cases} ax^2+bx \geq 0 \\ \frac{a}{4}x^2-bx+(2b-a)<0 \end{cases}$ e $a>0$, $b>0$, $b \neq a$, tem solução para

(A) $x < \frac{-b}{a}$ e $b > a$. (B) $x > 2$ e $b < a$.

(C) $0 < x < 1$ e $b > \frac{3}{4}a$. (D) $x > \frac{4b}{a} - 2$ e $a > 2b$. (E) N.d.r.a.

**Questão 13:** A seguinte soma $\log\frac{1}{2}+\log\frac{1}{4}+\ldots+\log\frac{1}{2^n}$ com $n$ natural é igual a

(A) $\log\frac{n+n^3}{2}$. (B) $(n+n^2)\log\sqrt{\frac{1}{2}}$.

(C) $-n(n+1)2\log 2$. (D) $\left(\frac{n^2-1}{2}\right)2^{\sqrt{2}}$ (E) N.d.r.a.

**Questão 14:** Qual o resto da divisão por $x-a$ do polinômio $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

(A) $2x^3+c$. (B) $6x^2+7$. (C) 5. (D) 0. (E) N.d.r.a.

**Questão 15:** Dividindo o polinômio $P(x)=x^3+x^2+x+1$ pelo polinômio $Q(x)$ obtemos o quociente $S(x)=1+x$ e o resto $R(x)=x+1$. O polinômio $Q(x)$ satisfaz

(A) $Q(2)=0$. (B) $Q(3)=0$. (C) $Q(0)\neq 0$. (D) $Q(1)\neq 0$. (E) N.d.r.a.

**Questão 16:** Seja $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{100}x^{100}$, onde $a_{100}=1$, um polinômio divisível por $(x+9)^{100}$. Nestas condições temos:

(A) $a_2=50\times 99\times 9^{98}$. (B) $a_2=\frac{100!}{2!\,98!}$.

(C) $a_2=\frac{99!}{2!\,98!}$. (D) $a_2=\frac{100!\,9^2}{2!\,98!}$. (E) N.d.r.a.

**Questão 17:** Determinando-se a condição sobre $t$ para que a equação $4^x - (\ln t + 3)2^x - \ln t = 0$ admita duas raízes reais e distintas, obtemos:
(A) $e^{-3} \leq t \leq 1$. (B) $t \geq 0$. (C) $e^{-1} < t < 1$. (D) $3 < t < e^2$. (E) N.d.r.a.

**Questão 18:** Qual é o menor valor de $x$ que verifica a equação $\operatorname{tg} x + 3\cotg x = 3$?
(A) $x = \pi/4$.
(B) para todo $x \in (0, \pi/2)$.
(C) para nenhum valor de $x$.
(D) para todo valor de $x \neq n\,\pi/2$ onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
(E) Apenas para $x$ no 3º quadrante.

**Questão 19:** Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras diferentes isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica a outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?
(A) 30. (B) 12. (C) 36. (D) 18. (E) N.d.r.a.

**Questão 20:** A igualdade $\dfrac{\cos x}{2} = \cos\dfrac{x}{2}$ é verificada para:
(A) Para qualquer valor de $x$.
(B) Para qualquer valor de $x \neq n\,\dfrac{\pi}{2}$ onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
(C) Para $x > 2 \arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.
(D) Para nenhum valor de $x$.
(E) Para $x = 2\arccos(\cos 60^\circ - \cos 30^\circ)$.

**Questão 21:** A equação $[\operatorname{sen}(\cos x)][\cos(\cos x)] = 1$ é satisfeita para
(A) $x = \pi/4$.
(B) $x = 0$.
(C) nenhum valor de $x$.
(D) todos os valores de $x$.
(E) todos os valores de $x$ pertencentes ao 3º quadrante.

**Questão 22:** Cortando-se um determinado prisma triangular, reto, por um plano $\alpha$ que forma um ângulo de $45^o$ com o plano da base $ABC$ observamos que a reta $r$, intersecção de $\alpha$ com o plano da base, dista 7 cm de $A$, 5 cm de $B$ e 2 cm de $C$. Se a área da base for 21 cm$^2$, o volume do tronco de prisma compreendido entre a base $ABC$ e o plano $\alpha$ será:

(A) $105$ cm$^3$. (B) $294$ cm$^3$. (C) $98$ cm$^3$. (D) $98\sqrt{2}$ cm$^3$. (E) $\frac{98}{\sqrt{2}}$ cm$^3$.

**Questão 23:** Seja $n$ um número inteiro $n > 1$ e $x \in (0, \pi/2)$. Qual afirmação abaixo é sempre verdadeira?

(A) $(1 - \operatorname{sen} x)^n \geq 1 - n \operatorname{sen} x$.
(B) $(1 - \operatorname{sen} x)^n \geq 1 - n \operatorname{sen} x$ para apenas $n$ par.
(C) $(1 - \operatorname{sen} x)^n \leq 1 - n \operatorname{sen} x$.
(D) $(1 - \operatorname{sen} x)^n \leq 1 - n \cos x$.
(E) N.d.r.a.

**Questão 24:** Seja $x \in (0, \pi/2)$. Qual afirmação abaixo é verdadeira?

(A) $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \leq 1$. (B) $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \leq 2$.

(C) $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \geq 2$. (D) $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 2$. (E) N.d.r.a.

**Questão 25:** Qual é o maior número de partes em que um plano pode ser dividido por $n$ linhas retas? (Sugestão: usar indução finita).

(A) $n^2$. (B) $n(n+1)$. (C) $\frac{n(n+1)}{2}$. (D) $\frac{n^2+n+2}{2}$. (E) N.d.r.a.

## I.44 Vestibular 1969

**Questão 01:** Considere a equação $a^{2x}+a^x-6=0$, com $a>1$. Uma das afirmações abaixo, relativamente à equação proposta, está correta. Assinale-a.

(A) $a^x=2$ e $a^x=-3$. (B) $x=\log_a 2$.
(C) $x=\log_a 2$ e $x=-3$. (D) $x=2$ e $x=\log_a 3$.
(E) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

**Questão 02:** Dada a equação $x^{2^{b\log x}}-x=0$, com $b$ inteiro e positivo e $\log x$ significando logaritmo neperiano de $x$, e dadas as afirmações abaixo relativas à equação proposta, assinalar a que for correta.

(A) $x=0$. (B) $x=2+b$. (C) $x=e^{2b}$. (D) $x=b\log 2$.
(E) Nenhum dos valores acima é solução.

**Questão 03:** Para que valores de $t$, o seguinte sistema

$$\begin{cases} x+y=\pi \\ \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\log_{10} t^2 \end{cases}$$

admite solução?

(A) $0<t<10$. (B) $0<t<10\pi$. (C) $0<t<10^2$. (D) $0{,}1\le t\le 10$.
(E) Em nenhum dos intervalos indicados acima.

**Questão 04:** A equação $\operatorname{sen}^2\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=a$ tem solução para valores particulares de $a$. Assinale um dos itens abaixo que lhe parecer correto.

(A) $1<a<\frac{7}{4}$. (B) $-2<a<\frac{5}{4}$. (C) $-1<a<\frac{1}{4}$. (D) $1<a<\frac{3}{2}$.
(E) Nenhum dos intervalos acima.

**Questão 05:** Consideremos a equação

$$(\operatorname{tg} a)^{\cos^2 x-(\cos x)\log b^7-8(\log b)^4}=(\operatorname{cotg} a)^{-2(\log b)^4}$$

onde $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{2}$, $a$ fixado, $b>0$ e $\log b$ indica o logaritmo neperiano de $b$. A equação acima tem solução em $x$ se:

(A) $0<\log b$. (B) $-\frac{1}{7}<\log b<2$. (C) $-2<\log b<\frac{1}{7}$.
(D) $-2<\log b<1$. (E) $-\frac{1}{6}<\log b<\frac{1}{8}$.

**Questão 06:** Sejam $p$ um número primo e $n$ um número inteiro maior que 1. Consideremos a igualdade $p^n = z + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{p^n}{p^m}$. Assinale o(s) valor(es) de $z$ que satisfaz(em) a igualdade acima.

(A) Para todo número inteiro $z$ tal que $1 < z < p$.
(B) $z$ é um inteiro qualquer.
(C) $z = 1$ ou para todo número real $z > p$.
(D) $z = n.\log p$, onde $\log p$ indica o logaritmo neperiano de $p$.
(E) $z$ é um número inteiro tal que $z \neq 1$.

**Questão 07:** Dizemos que um conjunto $C$ de pontos do espaço é convexo se dados pontos $A$ e $B$ quaisquer, pertencentes a $C$, o segmento de reta $\overline{AB}$ está contido em $C$. Há conjunto convexo numa das afirmações abaixo? Assinale a afirmação verdadeira.

(A) O plano excluído um de seus pontos.
(B) O conjunto dos pontos situados sobre uma câmara de ar de automóvel.
(C) A região plana limitada por um quadrilátero.
(D) A superfície lateral de um prisma.
(E) Nenhum dos conjuntos acima.

**Questão 08:** Consideremos um tetraedro regular de aresta $a$. Podemos calcular o volume $V$ deste sólido, em função da aresta $a$. Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) $12\sqrt{2}V = 2a^3$. (B) $2\sqrt{2}V = 2a^3\sqrt{3}$.
(C) $12V - \sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$. (D) $3V - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^3$.
(E) As afirmações (A), (B), (C) e (D) acima são falsas.

**Questão 09:** A soma $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$ é igual a

(A) $n2^{n-1}$. (B) $2^n$. (C) $n2^n$. (D) $(n+1)2^{n+1}$. (E) $n.2^{n+1}$.

**Questão 10:** Numa superfície poliédrica convexa aberta, o número de faces é 6 e o número de vértices é 8. Então o número de arestas é

(A) 8. (B) 11. (C) 12. (D) 13. (E) 14.

**Questão 11:** Consideremos uma esfera de raio $r$ e nela inscrevemos um cone reto cujo diâmetro da base tem comprimento igual ao da geratriz. O volume $V$ do cone em função do raio da esfera verifica uma das afirmações abaixo. Assinale-a.

(A) $V = 3\pi r^3$. (B) $V = \frac{3}{8}\pi r^3$. (C) $V = \frac{2}{3}\pi r^3$. (D) $V = \frac{3}{2}\pi r^3$.
(E) Nas condições dadas, não é possível obter o volume $V$ em função do raio.

**Questão 12:** Seja $x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 4x - 2 = 0$. Assinale a afirmação correta com relação à equação acima.

(A) não tem raízes reais positivas.
(B) não tem raízes reais negativas.
(C) só tem raízes complexas.
(D) tem duas raízes negativas.
(E) nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

**Questão 13:** Considere a equação $2^x + 2^{-x} = 2K$. Para determinados valores de $K$ a equação admite soluções reais. A coleção de todos estes valores de $K$ está definida num dos itens abaixo.

(A) $-1 < K < 1$. (B) $K > 0$. (C) Para todo $K$ diferente de 1.
(D) Para todo $K$ real. (E) $|K| \geq 1$.

**Questão 14:** Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x - 1$, duas funções reais. Definimos a função composta de $f$ e $g$ como sendo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Então $(g \circ f)(y - 1)$ é igual a:

(A) $y^2 - 2y + 1$. (B) $(y-1)^2 + 1$. (C) $y^2 + 2y - 2$. (D) $y^2 - 2y + 3$. (E) $y^2 - 1$.

**Questão 15:** Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $C$ um subconjunto de $\mathbb{R}$. Definimos supremo de $C$ como sendo o número real $L$ satisfazendo as seguintes condições:

1ª: $L$ é maior ou igual a qualquer número pertencente a $C$.

2ª: Dado um número real $L' < L$, existe sempre um número $x'$ de $C$ tal que $x' > L'$.

Seja $C$ o conjunto dos números naturais menores do que 11. Uma das afirmações abaixo, relativas ao conjunto $C$, é verdadeira. Assinale-a.

(A) $L = 9$. (B) $L = 10$. (C) $L = 11$. (D) $L = 12$. (E) Não existe supremo.

**Questão 16:** Seja $C$ o conjunto de todos os polinômios $P(x)$ de grau 2 que se anulam para $x = 1$ e $x = 2$. Seja $D$ o conjunto de todos os polinômios $P(x)$ de grau 2 que se anulam para $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. Então uma das afirmações abaixo é verdadeira.

(A) $C = D$.
(B) a união de $C$ com $D$ é igual a $D$.
(C) $C$ está contido em $D$.
(D) $D$ está contido em $C$.
(E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

**Questão 17:** Consideremos um plano $\alpha$ e uma reta $r$ que encontra esse plano num ponto $P$, e que não é perpendicular a $\alpha$. Assinale qual das afirmações é a verdadeira:

(A) Existem infinitas retas de $\alpha$ perpendiculares a $r$ pelo ponto $P$.
(B) Existem uma e somente uma reta de $\alpha$ perpendicular a $r$ por $P$.
(C) Não existe reta de $\alpha$, perpendicular a $r$, por $P$.
(D) Existem duas retas de $\alpha$ perpendiculares a $r$ passando por $P$.
(E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

**Questão 18:** Seja $C_1$ o conjunto das soluções do sistema $\begin{cases} 4x - 12y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ e seja $C_2$ o conjunto das soluções do sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - 2y = 16 \end{cases}$. Então temos:

(A) $C_1 = C_2$.
(B) $C_1$ está contido em $C_2$.
(C) $C_2$ está contido em $C_1$.
(D) a intersecção de $C_1$ e $C_2$ é vazia.
(E) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

**Questão 19:** Os coeficientes $A$, $B$, $C$ e $D$ do polinômio $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx - D$ devem satisfazer certas relações para que $P(x)$ seja um cubo perfeito. Assinale a opção correta para que isto se verifique.

(A) $D = \dfrac{C^2 A}{3B}$. (B) $C = \dfrac{B}{3A^2}$ e $D = \dfrac{B^3}{27A^3}$.

(C) $BC = 3A$ e $CD^2 = B^2 A^2$. (D) $C = \dfrac{B^2}{3A}$ e $D = \dfrac{B^3}{27A^2}$.

(E) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

**Questão 20:** Para que valores reais de $a$ e $b$ o seguinte sistema não admite solução?

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 0 \\ x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = b \end{cases}$$

(A) $a = -2$ e $b = 5$. (B) $a > -2$ e $b \neq 4$.
(C) $a = -2$ e $b \neq 5$. (D) $a = b = 1$.
(E) Nenhuma resposta acima é válida.

**Questão 21:** Consideremos a função $f(x) = x^3 - 1 + (1 - x)(x^2 + x + 1)$. O conjunto de todas as soluções da equação $f(x) = 0$ é:

(A) $\{-1, 0, 1\}$.
(B) $x$ reais tais que $-2 \leq x \leq 1$.
(C) $x$ reais positivos.
(D) conjunto vazio.
(E) conjunto de todos os números reais.

**Questão 22:** O conjunto dos pares de números reais $x$ e $y$, que satisfazem a desigualdade $\log_{x+1}(y - 2) > 0$ está entre as opções abaixo:

(A) $-1 < x < 0$ e $y > 3$.
(B) $x > 0$ e $2 < y < 3$.
(C) $x > 0$ e $y > 3$ ou $-1 < x < 0$ e $2 < y < 3$.
(D) $x > -1$ e $y > 2$.
(E) $x < 0$ e $2 < y < 3$.

**Questão 23:** Resolvendo a equação $C_{15,x-1} = C_{15,2x+1}$, onde $C_{m,p}$ significa o número de combinações simples (sem repetição) de $m$ elementos tomados $p$ a $p$, obtemos:

(A) $x = -2$ e $x = 5$. (B) $x = 2$ e $x = -2$. (C) $x = 2$ e $x = 5$. (D) $x = 2$. (E) Nenhuma das afirmações acima.

**Questão 24:** Sejam $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ matrizes quadradas $2 \times 2$. Definimos as matrizes: $\alpha.X$; $X + Y$ e $X.Y$ ($\alpha$ = número real) por: $\alpha.X = \begin{bmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} \end{bmatrix}$, $X + Y = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{bmatrix}$ e $X.Y = \begin{bmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} & x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} \\ x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21} & x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} \end{bmatrix}$. Uma das afirmações abaixo é verdadeira, assinale-a:

(A) $X.X = \begin{bmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 \end{bmatrix}$.
(B) $\det(\alpha.X) = \alpha \det X$, onde $X$ = determinante de $X$.
(C) $\det(X + Y) = \det X + \det Y$.
(D) $\det(\alpha X) = \alpha^2 \det X$.
(E) $\det(X.Y) = \det X + \det Y$.

**sIn:** No item (B), deveríamos ter $\det X$ = determinante de $X$.

**Questão 25:** Considere o plano de uma mesa e um ponto dado deste plano. Você dispõe de uma folha de papel que possui um só bordo reto. Dobrando esta folha de papel, conduza uma perpendicular ao plano da mesa, pelo ponto dado. A justificativa de tal construção está em um dos teoremas abaixo.

(A) Se uma reta é perpendicular a um plano, todo plano que passa por ela é perpendicular ao primeiro.
(B) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles que for perpendicular à intersecção será perpendicular ao outro.
(C) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes pelo seu ponto de intersecção, então a reta é perpendicular ao plano determinado por essas duas retas.
(D) Por um ponto exterior a um plano passa uma reta perpendicular ao plano e somente uma.
(E) Todas as perpendiculares a uma reta traçadas por um de seus pontos pertencem a um plano.

## I.45 Vestibular 1968

**Questão 01:** Se $a < 0$, a expressão $a^{\log_a x}$ é igual a:
(A) 1. (B) $a$. (C) 0. (D) 10. (E) Nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 02:** Sejam $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Então $\log_b x . \log_a b$ é igual a
(A) 1. (B) $x$. (C) $b$. (D) $\log_a x$. (E) Nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 03:** Dada a progressão geométrica: $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \ldots$ o limite da soma dos termos da P.G. é
(A) $\frac{1}{2^n}$. (B) 2. (C) $1 + \frac{1}{2^n}$. (D) $3/2$. (E) 3.

**Questão 04:** Dado um número real $m > 0$, existem um polígono regular circunscrito e um polígono regular inscrito numa mesma circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros é menor do que $m$. A afirmação acima é verdadeira quando:
(A) $m > 0$ e arbitrário.
(B) $m > 1$.
(C) $m$ depende do raio da circunferência.
(D) Necessariamente $m > 0$ e arbitrariamente pequeno.
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 05:** Dado um triângulo de lados $a = 3$ cm, $b = 4$ cm e $c = 6$ cm a projeção do lado $a$ sobre o lado $c$ é:
(A) $2\frac{5}{13}$ cm. (B) $2\frac{7}{12}$ cm. (C) $\frac{29}{12}$ cm. (D) 0. (E) $2\frac{1}{2}$ cm.

**Questão 06:** Existe um triângulo $ABC$ tal que $a = 10$ cm, $b = 4$ cm, $\beta = 30°$, onde $\beta$ é o ângulo oposto ao lado $b$? Em caso afirmativo, o lado $c$ vale:
(A) 8 cm. (B) 7 cm. (C) 9 cm. (D) 11 cm. (E) Não existe tal triângulo.

**Questão 07:** Uma esfera é colocada no interior de um vaso cônico com $\sqrt{55}$ cm de geratriz e $\sqrt{30}$ cm de altura. Sabendo-se que os pontos de tangência estão a 3 cm do vértice, o raio da esfera vale:
(A) $2\sqrt{30}$ cm. (B) $\frac{\sqrt{35}}{2}$ cm. (C) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ cm. (D) 3 cm.
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 08:** Todo polígono convexo inscrito numa ciurcunferência de raio $R$ tem:

(A) O perímetro igual a $\pi R^2$.
(B) O perímetro menor que $\pi R$.
(C) O perímetro menor que $8R$.
(D) O perímetro igual a $6R$.
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 09:** A função $x = \text{arc sen } y$ é univocamente determinada para:

(A) $0 \leq x \leq \pi$. (B) $0 < x \leq 2\pi$. (C) $-\pi \leq x \leq \pi$.
(D) $0 \leq x \leq 2k\pi, k = 1, 2, 3, \ldots$. (E) $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

**Questão 10:** Se $m \neq 1$, $y = \text{arc sen } \dfrac{m-1}{m+1}$ é igual a:

(A) $\text{arc cos } \dfrac{m-1}{m+1}$. (B) $\text{arc tg } \dfrac{m}{1+m^2}$.
(C) $\text{arc cos } \dfrac{2\sqrt{m}}{m+1}$. (D) $\text{arc sen } \left[1 - \left(\dfrac{m-1}{m-1}\right)^2\right]$.
(E) Nenhuma das respostas acima.

**Questão 11:** A equação $3x^5 - x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$ possui:

(A) Três raízes complexas e duas raízes reais.
(B) Pelo menos uma raiz real positiva.
(C) Todas raízes inteiras.
(D) Uma raiz complexa.
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 12:** Para que a equação $2x^4 + bx^3 - bx - 2 = 0$ tenha quatro soluções reais e distintas, devemos ter:

(A) $b$ um número real qualquer. (B) $b = 0$. (C) $b > 0$. (D) $b < -1$. (E) $b > 1$.

**Questão 13:** Sejam $a$ e $b$ dois números reais, $a > 0$ e $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Que relação devem satisfazer $a$ e $b$ para que a equação $x^2 - x(\log_b a) + 2\log_a b = 0$ tenha duas raízes reais e iguais?

(A) $a = b^2$. (B) $a = b$. (C) $a^2 = b$. (D) $a = 2b$. (E) $b = 2a$.

**Questão 14:** Quais os valores de $x$ que satisfazem a equação $\cos x - \cos \frac{x}{2} = 2$.

(A) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
(B) $x = K\pi$, $K$ inteiro qualquer.
(C) $x = (K + 1)\pi$, $K$ inteiro qualquer.
(D) $x = (2K + 2)\pi$, $K$ inteiro qualquer.
(E) $x = (4K + 2)\pi$, $K$ inteiro qualquer.

**Questão 15:** Para que valores do número real $a$, podemos garantir que existe $\operatorname{sen} 2x$, sabendo-se que $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = a$.

(A) $a > 1$. (B) $a \leq 0$. (C) $0 \leq a \leq 1$. (D) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$. (E) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

**Questão 16:** Sejam $a$ e $b$ dois números reais quaisquer e $p$ um número primo. A igualdade $(a \pm b)^p = a^p \pm b^p$ é verificada se:

(A) $a - b = 1$. (B) $a$ e $b$ são primos entre si.
(C) $b = p.a$. (D) $x.p = 0$ para todo número real $x$.
(E) Nenhuma das respostas acima.

**Questão 17:** Dizemos que os polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente independentes se a relação $a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) = 0$ implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (onde $a_1$, $a_2$ e $a_3$ são números reais). Caso contrário, dizemos que $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente dependentes. Os polinômios $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$ e $p_3(x) = x^2 + 2x + 2$ são:

(A) Linearmente independentes.
(B) Nem linearmente independentes nem linearmente dependentes.
(C) Linearmente independentes se $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ tiverem as raizes reais.
(D) Linearmente dependentes.
(E) Nenhuma das respostas acima.

**Questão 18:** Seja

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ y + \lambda z = 0 \end{cases}.$$

O sistema acima terá solução não trivial para um certo conjunto de valores de $\lambda$. Para que isto se verifique este conjunto é constituido:

(A) Apenas por números complexos não reais.
(B) Apenas por números reais.
(C) Apenas por números racionais.
(D) Apenas por números irracionais.
(E) Apenas por números inteiros.

**Questão 19:** Seja $y = a^{\log_a x}$ com $0 < a < 1$, onde $\log_a a$ indica o logaritmo neperiano de $a$. Então, $\log y \geq 0$ se:

(A) $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ e $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$.

(B) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ e $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

(C) $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ e $\pi < x \leq \frac{5\pi}{4}$.

(D) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ e $\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$.

(E) $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$.

**Questão 20:** Dadas duas retas concorrentes $a$ e $b$ e dado um ponto $M$, fora do plano determinado por $a$ e $b$, consideremos os pontos $E$ e $F$, simétricos de $M$ em relação às retas $a$ e $b$, respectivamente. A reta que une os pontos $E$ e $F$ é:

(A) Perpendicular ao plano determinado por $a$ e $b$.
(B) Paralela ao plano determinado por $a$ e $b$.
(C) Oblíqua ao plano determinado por $a$ e $b$.
(D) Pertencente ao plano determinado por $a$ e $b$.
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 21:** Consideremos um conjunto de retas paralelas no plano, distanciadas entre si de uma distância $d$. Uma agulha de comprimento $a$, onde $a < d$, é jogada sobre o conjunto de retas paralelas. Pelo ponto médio da agulha traçamos uma perpendicular à reta mais próxima, que forma com a agulha, um ângulo $\theta$. Seja $x$ a distância do ponto médio da agulha à reta mais próxima. Em qual dos seguintes casos, podemos assegurar que a agulha intercepta alguma reta do conjunto?

(A) $x \geq 2a \operatorname{sen} \theta$. (B) $x \leq \frac{a}{2} \cos \theta$. (C) $x < a \operatorname{sen} \theta \cos \theta$. (D) $x > a^2 \operatorname{sen} \theta$.
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 22:** O campo de definição e o campo de variação da função $y = \log_{10} x$ são respectivamente:

(A) O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais.
(B) O conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais.
(C) O conjunto dos números reais e o conjunto dos números reais.
(D) O conjunto dos números reais estritamente positivos e o conjunto dos números reais.
(E) O conjunto dos números reais diferentes de zero e o conjunto dos números reais.

**Questão 23:** Suponhamos que os polinômios $P(x)$, $Q(x)$, $p(x)$ e $q(x)$ satisfazem as seguintes condições:

$$P(X).p(x) + q(x).Q(x) = 1 \text{ para todo } x \text{ complexo.}$$
$$P(p(1)) = 0, \quad Q(0) = 0.$$

Assinale a afirmação correta:

(A) $P(x)$ é divisível por $S(x) = x$.
(B) $P(x)$ e $Q(x)$ não são primos entre si.
(C) $Q(p(1)) = 0$.
(D) $p(x)$ não é divisível por $R(x) = x - 1$.
(E) $p(0) = 0$.

**Questão 24:** O valor absoluto de um número $y$ é menor ou igual que todas as soluções positivas da equação $(1 - x) + x(1 - x) = 1 - x^2$. Assinale a afirmação correta:

(A) $y = -\frac{1}{2}$. (B) $y = -1$. (C) $-3 \leq y \leq 3$. (D) $y = \frac{1}{2}$.
(E) Nenhuma das afirmações acima.

**Questão 25:** Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais. A expressão $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$ é igual a:

(A) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 \sum_{j=1}^{n} a_j$. (B) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \right)$.

(C) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \binom{n}{2} \sum_{j=1}^{n} a_j$. (D) $\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \right)$.

(E) Nenhuma das respostas anteriores.

# I.46 Vestibular 1967

**Questão 01:** Sendo $\operatorname{sen} x = -1$, então
(A) $\operatorname{sen} 2x = -2$. (B) $\operatorname{sen} 2x = 0$. (C) $\operatorname{sen} 2x = -1$.
(D) $\operatorname{sen} 2x = 1$. (E) $\operatorname{sen} 2x = 2$.

**Questão 02:** Transformando $12^\circ$ em radianos obtemos
(A) $12^\circ = \dfrac{\pi}{15}$ rd. (B) $12^\circ = \dfrac{15}{\pi}$ rd. (C) $12^\circ = \dfrac{\pi}{30}$ rd.
(D) $12^\circ = \dfrac{2\pi}{15}$ rd. (E) $12^\circ = 12$ rd.

**Questão 03:** $\operatorname{sen}^2 x$ é igual a
(A) $\dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. (B) $\dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. (C) $\dfrac{1}{2}(1 + \operatorname{sen} 2x)$.
(D) $\dfrac{1}{2}(1 - \operatorname{sen} 2x)$. (E) $2 \operatorname{sen} x \cos x$.

**Questão 04:** $\operatorname{sen} x$ é igual a
(A) $\dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$. (B) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$. (C) $\dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.
(D) $\pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$. (E) $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$.

**Questão 05:** $\operatorname{sen} 14^\circ + \operatorname{sen} 18^\circ$ é igual a
(A) $-2 \operatorname{sen} 2^\circ \cos 16^\circ$. (B) $2 \operatorname{sen} 2^\circ \cos 16^\circ$. (C) $2 \operatorname{sen} 16^\circ \cos 2^\circ$.
(D) $-2 \operatorname{sen} 16^\circ \cos 2^\circ$. (E) $2 \cos 16^\circ \cos 2^\circ$.

**Questão 06:** Se $a > 1$, $b > 1$ e $c > 1$ temos
(A) $(\log_a b)(\log_b c) < \log_a c$.
(B) $(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$.
(C) $(\log_a b)(\log_b c) > \log_a c$.
(D) $\log_a b + \log_b c = \log_a c$.
(E) $(\log_a b)(\log_b c) = \dfrac{1}{\log_a c}$.

**Questão 07:** $\log_a b > \log_a c$ se
(A) $a > 1, b > 0, c > 0$. (B) $a > 1, b < c < 0$. (C) $a > 1, b > c > 0$.
(D) $a > 1, b > 1, c > 1$. (E) $0 < a < 1, b > c$.

**Questão 08:** Se $0 < c < 1$, então $\log_c b$ é igual a

(A) $\log_b c$. (B) $-\log_{\frac{1}{c}} b$. (C) $\log_{\frac{1}{c}} c$. (D) $-\log_b c$. (E) $\dfrac{1}{\log_b c}$.

**Questão 09:** Sejam o determinante $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ e $A_1$, $A_2$, $A_3$ respectivamente os complementos algébricos de $c_1$, $c_2$, $c_3$. Então $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ é igual a

(A) $D$. (B) $-D$. (C) zero. (D) $D^{-1}$. (E) 1.

**Questão 10:** O sistema $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x + 7y + 9z = a \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases}$

(A) Não tem solução para qualquer $a$.
(B) Somente tem solução para $a = 1$.
(C) Tem solução para qualquer $a$.
(D) Possui somente a solução $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ para $a = 0$.
(E) Tem solução diferente da solução $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ para $a = 0$.

**Questão 11:** É dada uma progressão geométrica com 1.000 termos; a razão dessa progressão é igual ao seu primeiro termo. A soma dos logaritmos neperianos dos termos dessa progressão é 1.001.000. O primeiro termo dessa progressão é

(A) 2. (B) $2^2$. (C) $e^{1/2}$. (D) $e^2$. (E) $e$.

**Questão 12:** Uma progressão geométrica tem 1.000 termos. O primeiro termo é 4 e o último é o número cujo logaritmo decimal é $999 + \log_{10} 4$. A soma dos 100 primeiros termos dessa progressão é

(A) $\dfrac{10^{100} - 1}{10 - 1}$. (B) $10^{100} - 1$. (C) $\dfrac{4}{9}(10^{100} - 1)$.
(D) $4(10^{100} - 109)$. (E) $\dfrac{1}{9}(10^{100} - 1)$.

**Questão 13:** A equação $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$

(A) Só admite uma raiz de multiplicidade 5.
(B) Se tiver apenas 2 raízes de multiplicidade 1, existe uma raiz de multiplicidade 2.
(C) Se tiver uma raiz de multiplicidade 3, tem duas raízes de multiplicidade 1.
(D) Se tiver apenas 4 raízes distintas, uma delas tem multiplicidade 2.
(E) Se tiver uma raiz real, todas serão reais.

**Questão 14:** A equação $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = 0$ tem raízes

(A) $\pm i; \frac{1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$. (B) $2i \pm 3; \frac{7 \pm 3i}{2}$. (C) $i \pm 1; \frac{2 \pm 2i}{3}$.
(D) $\pm i; \frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$. (E) $\frac{1 \pm 3}{5}; \frac{2 \pm i}{2}$.

**Questão 15:** Seja $y = (ax^2 - 2bx - (a + 2b))^{1/2}$. Em qual dos casos abaixo $y$ é real e diferente de zero?

(A) $a > 0, b > 0, -1 < x < \frac{a+b}{a}$.
(B) $a > 0, b < 0, x = \frac{a+2b}{a}$.
(C) $a > 0, b = 0, -1 < x < 1$.
(D) $a < 0, b = 3a, x < -1$.
(E) $a < 0, b = 2a, -1 < x < \frac{a+b}{a}$.

**Questão 16:** Um polinômio $P(x)$ dividido por $(x + 1)$ dá resto $(-1)$, por $(x - 1)$ dá resto 1 e por $(x + 2)$ dá resto 1. Qual será o resto da divisão do polinômio por $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$?

(A) $x^2 - x + 1$. (B) $x - 1$. (C) $x^2 + x - 1$. (D) $x^2 - x - 1$.
(E) Nenhum dos casos anteriores.

**Questão 17:** Um polinômio $P(x)$ tem a propriedade $P(x) = P(-x - 1)$. Definindo um novo polinômio $Q(x) = P(f(x))$ obteremos $Q(x) = Q(-x)$ quando $f(x)$ for igual a:

(A) $x - \frac{1}{2}$. (B) $x + \frac{1}{2}$. (C) $-x - 1$. (D) $x - 1$. (E) $-x + 1$.

**Questão 18:** Um polinômio $P(x)$, dividido por $x - 1$, dá resto 3. O quociente desta divisão é então dividido por $x - 2$, obtendo-se resto 2. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ será

(A) $3x + 2$. (B) $3x - 1$. (C) $2x + 1$. (D) $-x + 4$.
(E) Nenhum dos restos anteriores.

**Questão 19:** Em qual dos casos abaixo, vale a desigualdade

$$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2 - (a + 2)x + 2a} < 0$$

(A) $a < 0, x < 2a$. (B) $a = 0, x > -a$. (C) $a > 2, 2 < x < a$.
(D) $a > 2, -a < x < 2$. (E) $a > 2, x > 2a$.

**Questão 20:** O lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos, $P$, $Q$ e $R$, não alinhados, é:

(A) A circunferência por $P$, $Q$ e $R$.
(B) O triângulo $PQR$.
(C) Elipse com foco no ponto $P$.
(D) A mediatriz do segmento $\overline{PQ}$.
(E) A reta perpendicular ao plano formado pelos três pontos, passando pelo centro do círculo definido por $P$, $Q$ e $R$.

**Questão 21:** Seja dado um plano e um feixe de retas concorrentes pertencente ao plano. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de um ponto fora do plano às retas do feixe?

(A) Uma elipse com um dos focos no centro do feixe.
(B) Uma circunferência ou o centro do feixe.
(C) Uma circunferência com centro no centro do feixe.
(D) A reta que passa pelo centro do feixe e pelo pé da perpendicular do ponto ao plano.
(E) Uma parábola.

**Questão 22:** Qual o lugar geométrico dos pontos, cuja soma das distâncias a duas retas que se cortam é igual a uma dada constante $K$?

(A) Um quadrilátero.
(B) Uma circunferência.
(C) Uma reta passando pelo ponto de interseção das retas.
(D) Uma elipse.
(E) Uma hipérbole.

**Questão 23:** Cortando-se uma pirâmide regular de altura $h$, com um plano paralelo à base, resulta uma segunda pirâmide. Se a razão entre as áreas das superfícies laterais das pirâmides for $r$, a que distância do vértice deve passar o plano?

(A) $h^2 r$. (B) $h\sqrt{r}$. (C) $r\sqrt{h}$. (D) $\frac{\sqrt{r}}{h}$.
(E) Nenhuma das respostas anteriores.

**Questão 24:** Qual é o coeficiente de $x^{17}$ no desenvolvimento de $(1 + x^5 + x^7)^{20}$?

(A) zero. (B) 1.210. (C) 3.000. (D) 3.420. (E) 4.000.

**Questão 25:** $\sum_{k=0}^{10} 2^k \binom{10}{k}$ é igual a

(A) $2^{10}$. (B) $2^{10} - 1$. (C) $3^{10} - 1$. (D) $3^{10} + 1$. (E) $3^{10}$.

# I.47 Vestibular 1959

**Problema 01:** Das 5 afirmativas seguintes, apenas 3 são verdadeiras. Assinale e demonstre as afirmativas verdadeiras.

I. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[p]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \dfrac{p}{n}$;

II. Na equação $x^3 + ax^2 + bx - \sqrt{2} = 0$, existem valores para $a$ e $b$ tais que o produto das raízes da equação é um número inteiro;

III. $\log_a 3 + \log_a \dfrac{3}{3a-1} + 1 = \log_a \left(3 + \dfrac{3}{3a-1}\right)$ qualquer que seja $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 1/3$;

IV. Se existem $x$ e $y$, tais que $x > y$ e $a^x < a^y$, $(a > 0)$, então, existem $z$ e $w$, tais que $z > w$ e $a^z > a^w$;

V. $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, onde $n$ é um número inteiro e $x$ qualquer número maior ou igual a $-1$.

**Problema 02:** Das 5 afirmativas seguintes, apenas 3 são verdadeiras. Assinale e demonstre as afirmativas verdadeiras.

I. Existe uma progressão geométrica de 10 termos $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ de modo que $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ e $(a_{10})^{1/8} = 3.(2^{1/8})$;

II. A equação $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ admite sempre duas raízes, cujo produto é 1, quaisquer que sejam $a \neq 0$ e $b$;

III. No desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{2n+1}$, onde $n$ é inteiro e positivo, pela fórmula do binômio, existe um termo que não depende de $x$;

IV. Para todo $x$, tal que $(\operatorname{sen} x)(\cos x) \neq 1/2$, tem-se: $\operatorname{tg}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - (\operatorname{sen} x)(\cos x)}$;

V. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y < 0$, sempre que $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < 0$ e $x - y > \pi$.

**Problema 03:** Das 5 afirmativas seguintes, apenas 3 são verdadeiras. Assinale e demonstre as afirmativas verdadeiras.

I. Se $m$ e $p$ são números inteiros positivos, tais que o número de combinações de $m$ objetos $p$ a $p$ seja igual ao número de combinações dos $m$ objetos $p-1$ a $p-1$, então $m$ é necessariamente ímpar;

II. $\begin{vmatrix} 1 & a & 2a+d \\ 1 & b & 2b+d \\ 1 & c & 2c+d \end{vmatrix} \neq 0$;

III. Inscreve-se um cubo $C$ em uma esfera $E$. Nesse cubo inscreve-se uma esfera $E'$. Inscreve-se um novo cubo $C'$ na esfera $E'$. A área total do cubo $C'$ é $2S/3\pi$ onde $S$ é a área da esfera $E$;

IV. Inscreve-se uma esfera em um cone circular reto cujo raio da base é $a > 1$. Então, $gr > h - a$, onde $h$ é a altura do cone, $g$ a geratriz e $r$ o raio da esfera;

V. A área lateral do tronco de pirâmide regular é igual ao produto do apótema pela soma dos perímetros das bases.

# I.48 Vestibular 1958

**Problema 01:** Calcular $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 1}{4n^2 + 1}$.

**Problema 02:** Calcular o seno de um arco de $\left(2\pi - \dfrac{2\pi}{3}\right)$ radianos.

**Problema 03:** Mostrar que o determinante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ é divisível por 11, sabendo que os números 121, 143 e 165 também o são.

**Problema 04:** Demonstrar que se $A, B, C$ são ângulos de um triângulo não retângulo, então: $\operatorname{tg} \hat{A} + \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C} = \operatorname{tg} \hat{A} . \operatorname{tg} \hat{B} . \operatorname{tg} \hat{C}$. É verdadeira essa fórmula no caso de um triângulo retângulo? Justifique a resposta.

**Problema 05:** Um tronco de cone reto tem bases circulares de raios $R$ e $r$. Qual a altura para que a superfície lateral seja igual à soma das superfícies das bases?

**Problema 06:** Demonstrar que se uma progressão aritmética é tal que a soma dos $n$ primeiros termos é $n + 1$ vezes a metade do termo de ordem $n$, então a razão é igual ao primeiro termo.

**Problema 07:** Resolver a inequação: $\log_2(x^2 - 1) - \log_2(x^2 + 1) + 7 < 5 + \log_2(x + 1)$.

**Problema 08:** São dados 10 pontos num plano dos quais 8 sobre uma mesma reta $r$, e os outros 2 não alinhados com qualquer um dos 8 alinhados na reta $r$. Quantos triângulos podem ser formados usando os pontos dados como vértices?

**Problema 09:** Dão-se a superfície e a diagonal de um paralelepípedo retângulo. Calcular as dimensões sabendo que estão em progressão geométrica.

# I.49 Vestibular 1957

**Problema 01:**

a) Definir radiano; escrever a relação entre os números que medem um ângulo em graus e radianos e justificar a relação.

b) O que se entende por arco orientado?

c) Dois ângulos $a$ e $b$ são medidos em radianos pelos números $0.5$ e $0.5+6\pi$. Qual o ângulo maior? Explicar a resposta.

**Problema 02:** Provar que $1 + \operatorname{tg} a = \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(a+45^\circ)}{\cos a}$.

**Obs.:** Sugestão: $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

**Problema 03:** São dados os objetos $A, B, C, D$. Responder as perguntas seguintes (se tiverem sentido):

a) Quantos são os arranjos desses objetos tomados 3 a 3?

b) Quantas as combinações, tomadas 2 a 2?

c) Quantas as permutações, tomadas 3 a 3?

d) Escrever os arranjos desses objetos tomados 2 a 2.

e) Escrever as combinações, 2 a 2.

f) Escrever as permutações dos 4 objetos. Em que se distinguem as combinações dos arranjos?

**Problema 04:** A que distância do vértice, devemos cortar um cone reto de revolução, por um plano paralelo à base, de modo que o volume do cone destacado seja 1/8 do volume do primeiro cone?

**Problema 05:** Se $abcd \neq 0$, determinar $p$ e $q$ no sistema de equações

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ px + qy &= d \end{aligned}$$

de modo que ele seja indeterminado.

**Problema 06:** É possível encontrar uma equação do tipo $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$, de modo que duas raízes sejam da forma $p$ e $1/q$ ($p$ e $q$ naturais, primos entre si), e a terceira raiz seja um número fracionário? No caso de o problema ser possível, quais os valores de $p$?

**Problema 07:** Resolva a equação recíproca: $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

**Problema 08:** Sabendo-se que $a_n = \frac{n!}{n^n}$, calcular $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

**Problema 09:** Dado o tetraedro regular $ABCD$, tomam-se os pontos médios $E$ de $\overline{BC}$, $F$ de $\overline{AC}$, $G$ de $\overline{AD}$, $H$ de $\overline{BD}$. Mostre que o quadrilátero $EFGH$ é um quadrado.

**Problema 10:** Os números $a, b, c$ satisfazem a relação $a + b^2 = 1 - b$. Que condição deve satisfazer o número $a$, para que os logaritmos desses números $a, b, c$., nessa ordem, formem uma progressão geométrica?

## I.50 Vestibular 1954

**Problema 01:** Dizer quando uma fração ordinária é igual, maior ou menor que outra.

**Problema 02:** Definir os conceitos de quociente e resto da divisão de polinômios racionais inteiros.

**Problema 03:** Provar que a função $x - 2$ é contínua no ponto $x = 2$.

**Problema 04:** Qual é o logaritmo, na base 10, de $\sqrt[3]{10^5}$? Justificar a resposta.

**Problema 05:** Definir superfícies cônica, cilíndrica e de revolução.

**Problema 06:** Qual é a superfície total de um cone circular reto cujo raio da base é 4 cm e a altura $\sqrt{20}$ cm?

**Problema 07:** Calcular $\operatorname{sen} 30°$; usando este resultado, calcular $\operatorname{sen} 210°$.

**Problema 08:** Sendo $a$ e $b$ arcos do 1º quadrante e sabendo-se que $\operatorname{sen} a = 1/2$ e $\operatorname{sen} b = 1/3$, calcular $\operatorname{sen}(a + b)$.

**Problema 09:** Calcular o módulo de $\dfrac{3i}{2+i}$.

**Problema 10:** A equação $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$, tem uma raiz igual a $-2$. Calcular as outras raízes dessa equação.

**Problema 11:** Demonstrar que o resto da divisão de um polinômio racional inteiro em $x$, por $x - a$ é $P(a)$, isto é, o valor numérico que assume $P(x)$, quando se faz $x = a$.

**Problema 12:** Resolver o sistema de inequações:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &> 0 \\ 2x^2 - x - 1 &< 0 \end{aligned}$$

**Problema 13:** Demonstrar que o volume de um cilindro circular reto é $\pi r^2 h$, sendo $r$ o raio da base e $h$ a altura do cilindro.

**Problema 14:** Para que valores de $m$ a equação: $x^2 + 2\sqrt{3}x - \log m = 0$ admite raízes reais? Quais os sinais das raizes da equação, para esses valores de $m$?

**Problema 15:** Mostrar que $\dfrac{\log_a K}{\log_{ma} K} = 1 + \log_a m$.

# I.51 Vestibular 1951

**Problema 01:** Definição de número primo absoluto inteiro?

**Problema 02:** Por quê 5 é divisor de 20?

**Problema 03:** Dar a definição de limite (finito) de uma sucessão.

**Problema 04:** Escrever a fórmula do binômio de Newton.

**Problema 05:** Definição de ângulo plano (ou retilíneo) de um diedro.

**Problema 06:** Calcular em graus o suplemento do ângulo igual a $7\pi/8$ rd.

**Problema 07:** Definição de seno de um ângulo.

**Problema 08:** Verificar se $-1/2$ é raiz da equação $4x^3 - 2x + 6 = 0$.

**Problema 09:** Passar o número 1203 escrito no sistema de numeração de base 5 para o sistema de numeração de base 10.

**Problema 10:** Resolver a inequação $(x-2)(x+3) < 0$.

**Problema 11:** Achar o volume de uma pirâmide regular de base quadrática cuja diagonal da base mede 4 m e cuja aresta lateral mede 2,5 m.

**Problema 12:** Demonstrar que se $0 < x < 90^\circ$ então $\operatorname{sen} x + \cos x > 1$.

**Problema 13:** Calcular o menor valor inteiro para $n$, para o qual se tem: $\dfrac{1.2.3 \ldots n}{2.4.6 \ldots (2n)} < \dfrac{1}{104}$.

**Obs.:** $\log 2 = 0{,}301$.

**Problema 14:** Calcular $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\log n}{\log(n-1)}$.

## I.52 Vestibular 1950

**Problema 01:** Resolva a equação: $(x-1).x^2 = x(x+1) - 2x$.

**Problema 02:** Enunciar e demonstrar a lei dos senos para a resolução de triângulos e mostre como calcular a área de um triângulo quando são conhecidos dois lados e o ângulo por eles formado.

**Problema 03:** Enuncia a fórmula de Moivre e empregue-a para desenvolver as expressões: $\cos 2\theta$ e $\operatorname{sen} 2\theta$.

**Problema 04:** Resolva a equação $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$.

**Problema 05:** Resolva a equação $\operatorname{tg} x + b\operatorname{cotg} x = c$, onde $a$, $b$ e $c$ são números dados.

**Problema 06:** $OABC$ é uma pirâmide regular. Pela aresta $\overline{OA}$ e a bissetriz $\overline{OD}$ do ângulo $B\hat{O}C$, conduz-se um plano. Calcular a área do triângulo $OAD$, sabendo-se que $m(\overline{AB}) = 4$ m; $m(\overline{OA}) = 7$ m, sendo $D$ o ponto comum à bissetriz e ao lado $\overline{BC}$.

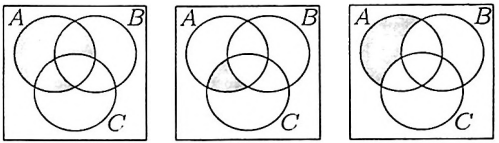
# Parte II

# Soluções Propostas

| Ano | Prova | Ano | Prova |
|---|---|---|---|
| 2013 | X | 1981 | X |
| 2012 | X | 1980 | X |
| 2011 | X | 1979 | X |
| 2010 | X | 1978 | X |
| 2009 | X | 1977 | X |
| 2008 | X | 1976 | X |
| 2007 | X | 1975 | X |
| 2006 | X | 1974 | X |
| 2005 | X | 1973 | X |
| 2004 | X | 1972 | X |
| 2003 | X | 1971 | X |
| 2002 | X | 1970 | - |
| 2001 | X | 1969 | X |
| 2000 | X | 1968 | X |
| 1999 | X | 1967 | X |
| 1998 | X | 1966 | - |
| 1997 | X | 1965 | - |
| 1996 | X | 1964 | - |
| 1995 | X | 1963 | - |
| 1993 | X | 1961 | - |
| 1992 | X | 1960 | - |
| 1991 | X | 1959 | X |
| 1990 | X | 1958 | X |
| 1989 | X | 1957 | X |
| 1988 | X | 1956 | - |
| 1987 | X | 1955 | - |
| 1986 | X | 1954 | X |
| 1985 | X | 1953 | - |
| 1984 | X | 1952 | - |
| 1983 | X | 1951 | X |
| 1982 | X | 1950 | X |

# II.1 Vestibular 2013

**Questão 01 (C):**




*I.* *II.* *III.D*

As regiões definidas em cada item são indicadas na figura acima, onde, para o item III, é mostrada apenas a região do lado direito da igualdade, já que a região correspondente ao lado esquerdo é o conjunto vazio. Assim, as afirmações I e II são verdadeiras enquanto a afirmação III é falsa.

**Questão 02 (C):** Resolvendo a equação dada, têm-se

$$z^4 = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} = 16 \text{ ou } 1 \Rightarrow z \in \{\pm 2, \pm 2i, \pm 1, \pm i\}.$$

de modo que a soma $S$ das raízes tais que $z = |z|$ é

$$S = 1 + 2 = 3.$$

**Questão 03 (B):** Resolvendo a equação dada, têm-se

$$z = \begin{cases} (5 - 3i) - 1 = 4 - 3i \\ (5 - 3i) + 1 = 6 - 3i \\ (5 - 3i) + i = 5 - 2i \\ (5 - 3i) - i = 5 - 4i \end{cases} \Rightarrow \arg z = \begin{cases} 2\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{6}\right) \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{5}\right) \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{5}\right) \end{cases}$$

já que $0 \leq \arg z < 2\pi$. Com isso, se $z_0$ é a solução com menor argumento, então

$$z_0 = 5 - 4i \Rightarrow |z_0| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}.$$

**Questão 04 (D):** Usando a variável auxiliar $y = 2^{\sqrt{x+1}}$, a equação original pode ser reescrita da forma

$$y^3 + 44y + 64 = 19y^2,$$

cuja raiz $y = -1$ pode ser obtida por inspeção, de modo que essa equação pode ser decomposta como

$$\begin{aligned}(y+1)(y^2-20y+64) = 0 \Rightarrow &\begin{cases} y = -1 \\ \text{ou} \\ y = \frac{20 \pm \sqrt{400-256}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} = 1 \text{ ou } 16 \end{cases} \\ &\Rightarrow 2^{\sqrt{x+1}} = -1, 2^2 \text{ ou } 2^4 \\ &\Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \text{ ou } 4 \\ &\Rightarrow x = 3 \text{ ou } 15,\end{aligned}$$

cuja soma é igual a $S = 18$.

**Questão 05 (A):** Das condições do problema, devemos ter $a, b > 0$, e ainda

$$\begin{cases} a^2 b = \frac{1}{16} \\ a^2 + b = \frac{5}{8} \end{cases}$$

e assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{16b} + b = \frac{5}{8} &\Rightarrow 16b^2 - 10b + 1 = 0 \\ &\Rightarrow b = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{32} = \frac{10 \pm 6}{32} = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{8} \\ &\Rightarrow a^2 = \frac{1}{8} \text{ ou } \frac{1}{2},\end{aligned}$$

e os possíveis valores de $\frac{a}{b}$ são

$$\frac{a}{b} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \pm 4\sqrt{2}.$$

**Questão 06 (E):** Do enunciado,

$$\begin{cases} e^{1-a+b} = 1 = e^0 \\ e^{1-2a+b} = 1 = e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 2.$$

Logo,

$$g(f(x)) = \ln\left(\frac{e^{x^2+3x+2}}{2}\right) = x^2 + 3x + (2 - \ln 2).$$

que é definida para todo $x$ real, e ainda

$$\begin{cases} g(f(1)) = 6 - \ln 2 \\ g(f(0)) = 2 - \ln 2 \\ g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1+4\ln 2}}{2} \end{cases},$$

de modo que $g(f(x))$ apresenta duas raízes reais distintas.

**Questão 07 (A):**

I. Sejam as funções bijetoras $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, tais que $(f+g)(x) = 0$, que não é nem injetora nem sobrejetora, e as afirmações I e II são falsas;

II. Sejam as funções $f(x) = |x|$ e $g(x) = x - |x|$, ou seja,

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

que não são nem injetoras nem sobrejetoras. Nesse caso, $(f+g)(x) = x$ que é bijetora, e as afirmações III e IV são falsas.

**Questão 08 (C):** Sejam $q_1$ e $0 \leq r_1 \leq 5$ o quociente e o resto, respectivamente, da divisão de $n$ por 6, ou seja,

$$n = 6q_1 + r_1 \Rightarrow n^2 = 36q_1^2 + 12q_1r_1 + r_1^2 = 6(6q_1^2 + 2q_1r_1) + r_1^2.$$

Assim, para que o quociente de $n^2$ por 6 seja ímpar, a divisão de $r_1^2$ por 6 deve gerar um quociente ímpar. Testando todas as possibilidades para $r_1$, têm-se

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_1 = 1 \\ r_1 = 2 \\ r_1 = 3 \\ r_1 = 4 \\ r_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1^2 = 0 = 6\times 0 + 0 \\ r_1^2 = 1 = 6\times 0 + 1 \\ r_1^2 = 4 = 6\times 0 + 4 \\ r_1^2 = 9 = 6\times 1 + 3 \\ r_1^2 = 16 = 6\times 2 + 4 \\ r_1^2 = 25 = 6\times 4 + 1 \end{cases},$$

de modo que a única opção que gera um quociente ímpar gera também um resto 3.

**Questão 09 (D):** Seja $q$ a razão da progressão geométrica dada, de modo que, por Girard, a soma $S$ das raízes da equação é igual a

$$S = -\frac{a_4}{a_5} = -\frac{a_0 q^4}{a_0 q^5} = -\frac{1}{q} = -2 \Rightarrow q = \frac{1}{2},$$

e assim

$$\sum_{n=0}^{5} a_n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32}.$$

**Questão 10 (B):** Do enunciado,

$$\begin{cases} \lambda \geq -9 \\ 2\lambda \geq -17 \end{cases} \Rightarrow \lambda \geq -9.$$

Elevando a equação em $\lambda$ duas vezes ao quadrado, têm-se

$$\begin{aligned} &(\lambda + 9) + 2\sqrt{\lambda + 9}\sqrt{2\lambda + 17} + (2\lambda + 17) = 144 \\ \Rightarrow\ &2\sqrt{\lambda + 9}\sqrt{2\lambda + 17} = 118 - 3\lambda \\ \Rightarrow\ &4(\lambda + 9)(2\lambda + 17) = (118 - 3\lambda)^2 \\ \Rightarrow\ &8\lambda^2 + 140\lambda + 612 = 13924 - 708\lambda + 9\lambda^2 \\ \Rightarrow\ &\lambda^2 - 848\lambda + 13312 = 0 \\ \Rightarrow\ &\lambda = \frac{848 \pm \sqrt{719104 - 53248}}{2} = \frac{848 \pm 816}{2} = 16 \text{ ou } 832. \end{aligned}$$

Logo, $\lambda = 16$, já que

$$118 - 3\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{118}{3}.$$

Com isso, a equação em $z$ tem soluções da forma

$$z^4 = 16 - 32 = -16 = 16e^{i(\pi + 2k\pi)} \Rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{4\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, 2e^{i\frac{7\pi}{4}},$$

e a soma $S$ das soluções com $\operatorname{Re} z > 0$ é dada por

$$S = 2e^{i\frac{\pi}{4}} + 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

**Questão 11 (E):** Do enunciado, é possível determinar

$$\begin{cases} p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \\ p(A^C \cup B^C) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

**Questão 12 (D):** A ocorrência de exatamente $k$ caras (e consequentemente $(n-k)$ coroas) em $n$ lançamentos de uma moeda justa tem probabilidade

$$p = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

de modo que as probabilidades dos eventos dados são iguais a

$$\begin{cases} p_I = \frac{\binom{2}{1}}{2^2} = \frac{1}{4} \\ p_{II} = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \\ p_{III} = \frac{\binom{5}{3}}{2^5} = \frac{56}{256} = \frac{7}{32} \end{cases}.$$

Logo, os eventos I e II são igualmente prováveis e o evento III é o menos provável.

**Questão 13 (C):** Usando as propriedades básicas dos determinantes de matrizes $5\times 5$, têm-se

$$\det(aA^tAA^t) = a^5\det^3(A) = a^5(\sqrt{6})^3 = \sqrt{6}a^2 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{6}.$$

**Questão 14 (E):** Desenvolvendo a equação trigonométrica dada, têm-se

$$\begin{aligned} &(1-\operatorname{sen}^2 x)^4 - \operatorname{sen}^8 x + 4\operatorname{sen}^6 x = a \\ \Rightarrow\ &1 - 4\operatorname{sen}^2 x + 6\operatorname{sen}^4 x - 4\operatorname{sen}^6 x + \operatorname{sen}^8 x - \operatorname{sen}^8 x + 4\operatorname{sen}^6 x = a \\ \Rightarrow\ &6\operatorname{sen}^4 x - 4\operatorname{sen}^2 x + (1-a) = 0 \\ \Rightarrow\ &\operatorname{sen}^2 x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24(1-a)}}{12} = \frac{2 \pm \sqrt{6a-2}}{6}. \end{aligned}$$

Assim:

- Se $a = 0$, então

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{2 \pm \sqrt{-2}}{6} \Rightarrow n = 0;$$

- Se $a = \frac{1}{2}$, então

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{2 \pm 1}{6} = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow n = 8;$$

- Se $a = 1$, então

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{2 \pm 2}{6} = 0 \text{ ou } \frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \text{ ou } \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow n = 7;$$

- Se $a = 3$, então

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{2 \pm 4}{6} = 1 \text{ ou } -\frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm 1 \Rightarrow n = 2,$$

de modo que todas as afirmações são verdadeiras.

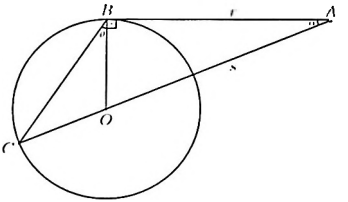
**Questão 15 (A):** Do enunciado,

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{2} + 1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, desenvolvendo a expressão $E$ trigonométrica dada, têm-se

$$E = \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - 1}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x-\pi)} - \frac{1}{\cos(\pi - x)}} = \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{-\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x}} = \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen} x \cos x}} = -\cos x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Questão 16 (B):**




Usando a notação indicada na figura acima,

$$A\hat{O}B = 90° - \alpha \Rightarrow \begin{cases} B\hat{C}O = \frac{A\hat{O}B}{2} = 45° - \frac{\alpha}{2} \\ B\hat{O}C = 180° - A\hat{O}B = 90° + \alpha \end{cases}.$$

Logo, no triângulo $\Delta BCO$, têm-se

$$C\hat{B}O + B\hat{C}O + B\hat{O}C = \theta + 45° - \frac{\alpha}{2} + 90° + \alpha = 180°,$$

de modo que

$$\alpha = 90° - 2\theta = 270° - 2(\theta + 90°) \Rightarrow C\hat{A}B = \frac{3}{2}\pi - 2A\hat{B}C.$$

**Questão 17 (B):** Determinando a(s) interseção(ões) da parábola com uma reta do tipo $y = y_0$, têm-se

$$x^2 + 2x(y_0 - 1) + (y_0^2 + 4y_0 + 1) = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{-2(y_0 - 1) \pm \sqrt{4(y_0 - 1)^2 - 4(y_0^2 + 4y_0 + 1)}}{2} = 1 - y_0 \pm \sqrt{-3y_0}.$$

Assim, forçando essa interseção a ser única, de modo que a reta $y = y_0$ seja tangente à parábola, têm-se $y_0 = 0$ e $x = 1$, caracterizando uma única reta tangente paralela ao eixo $Ox$ e o ponto de tangência $(1, 0)$.
**Obs:** Rotacionando a parábola com a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \end{cases}$$

têm-se

$$\frac{1}{2}(u-v)^2 + (u-v)(u+v) + \frac{1}{2}(u+v)^2 - \sqrt{2}(u-v) - 2\sqrt{2}(u-v) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow 2u^2 + \sqrt{2}u + 3\sqrt{2}v + 1 = 0$$
$$\Rightarrow v = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}u + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}\right].$$

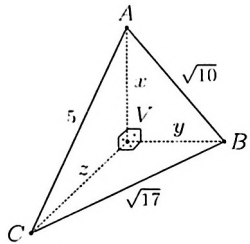
cujo vértice está localizado em

$$(u, v) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{8}\right) \Rightarrow (x, y) = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right).$$

**Questão 18 (D):**

- Duas retas coplanares podem ser paralelas, e a afirmação I é falsa;
- Duas retas que não têm ponto em comum podem ser paralelas, pertencendo ao mesmo plano, e a afirmação II é falsa;
- Existem infinitos planos contendo uma reta qualquer no espaço. Desses planos, apenas um é paralelo a uma outra reta reversa com a primeira, e a afirmação III é verdadeira;
- De fato, usando o conceito de base média, os segmentos que unem os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso são, dois a dois, paralelos e congruentes, caracterizando um paralelogramo, e a afirmação IV é verdadeira.

**Questão 19 (A):**




Sejam $VA = x$, $VB = y$ e $VC = z$. Pelo teorema de Pitágoras, têm-se

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + z^2 = 25 \\ y^2 + z^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{10+25-17}{2}} = 3 \\ x = \sqrt{\frac{10+17-25}{2}} = 1 \\ x = \sqrt{\frac{25+17-10}{2}} = 4 \end{cases}.$$

de modo que o volume $v$ do tetraedro é igual a

$$v = \frac{xyz}{6} = 2\ \text{cm}^3.$$

**Questão 20 (B):** Do enunciado,

$$\begin{cases} AB = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5 \\ AC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \end{cases}.$$

de modo que o triângulo $\Delta ABC$ é retângulo de hipotenusa $AB$ e o raio da base do cilindro é $r = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$. Com isso, a razão $R$ solicitada é igual a

$$R = \frac{\pi r^2 h}{2 \times \pi r^2 + 2\pi r h} = \frac{rh}{2(r+h)} = \frac{\frac{5}{2} \times 8}{2(\frac{5}{2} + 8)} = \frac{20}{21} = \frac{100}{105}.$$

**Problema 01:** Do enunciado,

$$\arg z = \operatorname{arctg} y \Rightarrow y = \operatorname{tg}(\arg z).$$

e ainda

$$a = |z|^{10} = (\sqrt{1+y^2})^{10} = (1+y^2)^5 = (1+\operatorname{tg}^2(\arg z))^5 = \sec^{10}(\arg z).$$

Para termos $z^{10} = a$, com $a$ real e maior do que 1, então o argumento de $z$ deve ser da forma $\frac{2k\pi}{10}$, com $k$ inteiro. Além disso, como $z$ pertence ao primeiro quadrante, já que $y > 0$, então o argumento de $z$ é tal que $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Assim, devemos ter

$$0 < \frac{2k\pi}{10} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = 1 \text{ ou } 2 \Rightarrow \arg z = \frac{2\pi}{10} \text{ ou } \frac{4\pi}{10},$$

e os possíveis pares $(a, y)$ são

$$(a, y) = \left(\sec^{10}\frac{\pi}{5}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right) \text{ ou } \left(\sec^{10}\frac{2\pi}{5}, \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}\right).$$

**Problema 02:** Da definição da função logaritmo, devemos ter

$$\begin{cases} x(\frac{\pi}{4} - x) > 0 \\ x(\frac{\pi}{4} - x) \neq 1 \\ 4\operatorname{sen} x \cos x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ x \neq \frac{\frac{\pi}{4} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - 4}}{2} \\ \operatorname{sen} 2x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}.$$

**Problema 03:** Por Girard, a soma das raízes de $P(m)$ é tal que $\frac{3}{a} = 3 \Rightarrow a = 1$, e as raízes de $P(m)$ são dadas por

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} = -3 \text{ ou } 6.$$

Observando que $x = -1$ é raiz do polinômio $Q(x)$ dado, independentemente do valor de $m$, então $Q(x)$ pode ser decomposto da forma

$$Q(x) = x^3 + mx^2 + (m+4)x + 5 = (x+1)[x^2 - (m-1)x + 5],$$

de modo que suas raízes são $x = -1 \in ]-2, 2[$ e

$$x = \frac{(1-m) \pm \sqrt{(m-1)^2 - 20}}{2} = \begin{cases} \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}, & \text{se } m = -3 \\ \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}, & \text{se } m = 6 \end{cases}$$

com $\frac{-5+\sqrt{5}}{2} \in ]-2, 2[$.

**Problema 04:**

- Usando uma única cor para colorir todo o tetraedro, podemos formar 4 tetraedros distintos, cada um com uma cor diferente;
- Usando duas cores para colorir o tetraedro, podemos escolher $\binom{4}{2} = 6$ combinações de cores. Além disso, podemos pintar três faces com uma cor e uma face com a outra cor, e vice-versa, ou duas faces com cada cor, totalizando $6 \times 3 = 18$ tetraedros distintos;
- Usando três cores para colorir o tetraedro, podemos escolher $\binom{4}{3} = 4$ combinações de cores. Além disso, podemos escolher 3 opções para a cor que vai colorir duas faces, enquanto as outras duas cores serão usadas para colorir uma única face cada uma, gerando, nesse caso, de $4 \times 3 = 12$ possibilidades;
- Utilizando as quatro cores, cada cor irá colorir uma face, e só será possível distinguir 2 tetraedros usando a reversão de cores de duas faces quaisquer.

Assim, podemos pintar $(4 + 18 + 12 + 2) = 36$ tetraedros fundamentalmente distintos.

**Problema 05:**

a) Da primeira equação, têm-se

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2},$$

de modo que $\alpha \geq -\frac{1}{4}$ para que as raízes sejam reais.

Substituindo esses valores de $x$ na segunda equação, têm-se

$$x(1 - x^2) = x(1 - x)(1 + x) = -\alpha(1 + x) = \beta$$
$$\Rightarrow \beta = -\alpha\left(1 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}\right) = -\frac{\alpha(3 \pm \sqrt{1 + 4\alpha})}{2};$$

b) Para os valores de $\beta$ encontrados acima, a equação $(x - x^4) = \beta$ sempre apresenta as duas raízes reais

$$x = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 4\alpha}}{2},$$

e a equação dada se torna equivalente a $-\alpha(x + 1) = \beta$, de modo que a terceira raiz é

$$\begin{cases} -1, & \text{se } \alpha = \beta = 0 \\ -\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha}, & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases}.$$

**Problema 06:**

(i) Para que o sistema seja possível e determinado, o determinante $D$ de sua matriz característica deve ser não nulo, ou seja

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 3\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 1 - 4\cos^2\alpha \neq 0,$$

e assim

$$\cos^2\alpha \neq \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\alpha \neq \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{3},$$

pois $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. Nesse caso, têm-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & 3\cos\alpha \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -3\cos\alpha \\ -\cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a\operatorname{sen}\alpha - 3b\cos\alpha}{1-4\cos^2\alpha} \\ \frac{-a\cos\alpha + b\operatorname{sen}\alpha}{1-4\cos^2\alpha} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Para que o sistema seja possível e determinado, de início, devemos ter o determinante $D$ nulo, de modo que $\alpha = \frac{\pi}{3}$, e o sistema se torna

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,x + 3y = 2a \\ x + \sqrt{3}\,y = 2b \end{cases}.$$

Multiplicando a segunda equação por $\sqrt{3}$, ela se torna equivalente à primeira equação, e o sistema se torna indeterminado, se $a = b\sqrt{3}$. Nesse caso, a solução geral do sistema é da forma

$$x = \frac{2a - 3y}{\sqrt{3}} = 2b - \sqrt{3}\,y,$$

para um $y$ qualquer;

(iii) Dos itens anteriores, para que o sistema seja impossível, devemos ter $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e $a \neq b\sqrt{3}$.

**Problema 07:** Desenvolvendo a primeira equação, têm-se

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\right)\cos\alpha\operatorname{sen}\beta-2\cos^2(\alpha-\beta)=-1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}\right)\cos\alpha\operatorname{sen}\beta-2\cos^2(\alpha-\beta)=-1$$

$$\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)-2\cos^2(\alpha-\beta)=-1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)-1=0$$

$$\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=1\text{ ou }-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\alpha-\beta=0\text{ ou }-\frac{\pi}{3}.$$

já que $-\frac{\pi}{2}<(\alpha-\beta)<\frac{\pi}{2}$.

Desenvolvendo a segunda equação, têm-se

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\frac{\pi}{6})=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\text{ ou }(\pi-\frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}\text{ ou }\frac{\pi}{2}.$$

já que $0<(\alpha+\beta)<\pi$.

Assim, a partir do desenvolvimento das duas equações dadas, podemos formar quatro sistemas de equações, resolvidos a seguir:

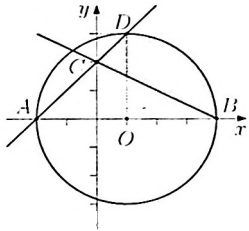
$$\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\tfrac{\pi}{12},$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\tfrac{\pi}{4},$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta=-\frac{\pi}{3}\\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\nexists\,\alpha\in\left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[.$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta=-\frac{\pi}{3}\\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\tfrac{\pi}{12}\text{ e }\beta=\tfrac{5\pi}{12}.$$

**Problema 08:**




A interseção das duas retas é dada por

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y + \frac{x}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow C = (0, 2)$$

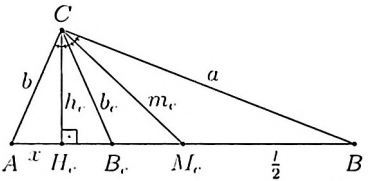
e a interseção no primeiro quadrante da reta $y = (x+2)$ com a circunferência é tal que

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -2 \text{ ou } 1 \Rightarrow D = (1, 3).$$

Com isso, a região de interesse é representada na figura acima, onde $A = (-2, 0)$ e $B = (4, 0)$, e a área $S$ desejada é igual à área de um semicírculo de raio $r = 3$ subtraído do triângulo $\Delta ABC$ (de base $AB = 2r$ e altura $h = 2$) e do segmento circular sub-entendendo um ângulo de $90°$ do mesmo círculo de raio $r$. Assim,

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi r^2}{2} - S_{ABC} - \left( \frac{\pi r^2}{4} - S_{ADO} \right) \\ &= \frac{\pi r^2}{4} - S_{ABC} + S_{ADO} \\ &= \frac{\pi r^2}{4} - \frac{2rh}{2} + \frac{r^2}{2} \\ &= \frac{3(3\pi - 2)}{4}. \end{aligned}$$

**Problema 09:**




Sejam a altura $h_c$, a bissetriz $b_c$ e a mediana $m_c$, relativas ao vértice $C$, e os respectivos pés $H_c$, $B_c$ e $M_c$ sobre o lado $AB$. Sejam, ainda $AC = b$, $BC = a$ e $AH_c = x$, conforme indicado na figura acima.

Da congruência dos triângulos $\Delta ACH_c$ e $\Delta B_cCH_c$, têm-se $b_c = b$ e $AH_c = B_cH_c = x$.

a) Aplicando o teorema das bissetrizes nos triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta CB_cB$, têm-se

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{b} = \dfrac{l-2x}{a} \\ \dfrac{\frac{l}{2}-2x}{b} = \dfrac{\frac{l}{2}}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{2x}{l-2x} \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{l-4x}{l} \end{cases}.$$

de modo que

$$\frac{2x}{l-2x} = \frac{l-4x}{l} \Rightarrow 8x^2 - 8lx + l^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-32}}{16} l = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} l,$$

e assim $x = \frac{2-\sqrt{2}}{4} l$, pois $x < \frac{l}{2}$. Com isso,

$$\frac{b}{a} = \frac{l - 4\frac{2-\sqrt{2}}{4} l}{l} = (\sqrt{2} - 1).$$

Logo, pelo teorema de Pitágoras, têm-se

$$\begin{aligned} h_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (l-x)^2 &\Rightarrow b^2 = a^2 - l^2 + 2lx = a^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} l^2 \\ &\Rightarrow a^2(\sqrt{2}-1)^2 = a^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} l^2 \\ &\Rightarrow a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} l^2. \end{aligned}$$

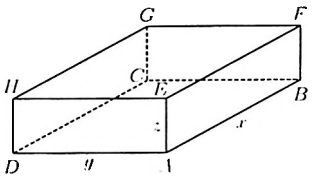
Com isso, aplicando mais uma vez o teorema de Pitágoras, têm-se

$$h_c^2 - m_c^2 = \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 = a^2 - (l-x)^2$$
$$\Rightarrow m_c^2 = a^2 - \frac{3l^2}{4} + lx = \frac{2+\sqrt{2}}{4}l^2 - \frac{3}{4}l^2 + \frac{2-\sqrt{2}}{4}l^2 = \frac{l^2}{4}$$
$$\Rightarrow m_c = \frac{l}{2}.$$

b) Como $m_c = \frac{l}{2} = \frac{AB}{2}$, então o triângulo $\Delta ABC$ é retângulo com hipotenusa $AB = l$ e assim

$$M_cC = M_cA = M_cB \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \frac{3\hat{C}}{4} = 67{,}5^\circ \\ \hat{B} = \frac{\hat{C}}{4} = 22{,}5^\circ \end{cases}.$$

**Problema 10:**




a) Sejam $AB = x$, $AD = y$ e $AE = z$, tais que $(x + z) = 2y$ e ainda

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ \frac{xyz}{6} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x + z = 8 \\ xz = 15 \end{cases}.$$

Logo,

$$x + \frac{15}{x} = 8 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = 3 \text{ ou } 5$$

de modo que $z = 5$ ou $z = 3$;

b) Do item anterior, o volume $V$ e a área total $S_T$ da superfície do paralelepípedo são respectivamente iguais a

$$V = xyz = 60 \text{ cm}^3$$
$$S_T = 2(xy + xz + yz) = 2(12 + 15 + 20) = 94 \text{ cm}^2.$$

## II.2 Vestibular 2012

**Questão 01 (D):** As possibilidades são

$$\begin{cases} 2\times 10+1\times 5 \\ 2\times 10+5\times 1 \\ 1\times 10+3\times 5 \\ 1\times 10+2\times 5+5\times 1 \\ 1\times 10+1\times 5+10\times 1 \\ 1\times 10+15\times 1 \\ 5\times 5 \\ 4\times 5+5\times 1 \\ 3\times 5+10\times 1 \\ 2\times 5+15\times 1 \\ 1\times 5+20\times 1 \\ 25\times 1 \end{cases}$$

**Questão 02 (D):** A probabilidade do alvo não ser atingido é $(2/3)^2$. Logo a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é $[1-(2/3)^2]=5/9$.

**Questão 03 (B):** O menor inteiro positivo $n$ tal que $(1+i)^n$ é real é $n=4$. Assim.

$$\begin{cases} z=16e^{i\frac{\pi}{4}} \\ w=4e^{i\frac{\pi}{12}} \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{w}=4e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)}=4e^{i\frac{\pi}{6}}=4(\cos 30^\circ+i\,\mathrm{sen}\,30^\circ)=2(\sqrt{3}+i).$$

**Questão 04 (E):** Se $z=|z|e^{i\frac{\pi}{4}}$, então

$$(-2iz)=2|z|e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=2|z|e^{i\frac{7\pi}{4}},$$

de modo que $\arg(-2iz)=\frac{7\pi}{4}$.

**Questão 05 (E):**

I. Se $r_1$ ou $r_2$ é racional, o outro também deve ser racional, pois $r_1-r_2$ é racional. Com isto, $r_3$ é necessariamente racional, pois $r_1+r_2+r_3$ é racional. Logo, a afirmação I é verdadeira;

II. Se $r_3$ é racional, então $r_1+r_2$ é racional, pois $r_1+r_2+r_3$ é racional, de modo que a afirmação II é verdadeira;

III. Se $r_3$ é racional, então $r_1+r_2$ é racional (ver item acima). Além disto, como $r_1-r_2$ também é racional, então $r_1$ e $r_2$ necessariamente são racionais, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 06 (C):** Por Girard e pelas relações do enunciado, têm-se que

$$\begin{cases} x_1x_2x_3 = -16 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \\ x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema linear das últimas três equações, obtêm-se $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ e $x_3 = 4$, de modo que, pela segunda equação, tem-se

$$a = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -4 - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = -4 + 4\sqrt{2}.$$

**Questão 07 (A):** Da definição de progressão aritmética, têm-se

$$\begin{cases} (x + 2y) + (8x - 2y) = 2(3x - 5y) \\ (3x - 5y) - (11x - 7y + 2z) = 2(8x - 2y) \\ 11x - 7y + 2z = -127 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 10y = 0 \\ -2x - 8y - 2z = 0 \\ 11x - 7y + 2z = -127 \end{cases}$$

Logo, $x = -10$, $y = 3$ e $z = 2$, de modo que $xyz = -60$.

**Questão 08 (C):** Das condições do enunciado, as cinco raízes de $p(x)$ são $\pm 2i$, $-\sqrt{3} \pm i$ e $5$. Logo, $p(x)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} p(x) &= k(x + 2i)(x - 2i)[x - (-\sqrt{3} + i)][x - (-\sqrt{3} - i)](x - 5) \\ &= k(x^2 + 4)[(x + \sqrt{3})^2 + 1](x - 5). \end{aligned}$$

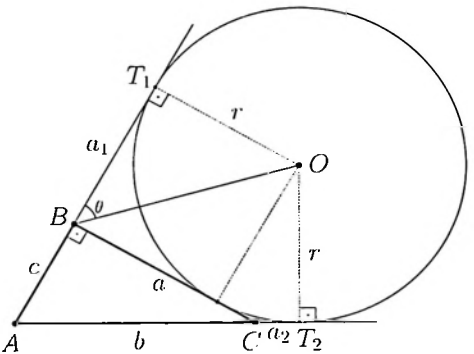
com $k$ tal que

$$p(1) = k(1^2 + 4)[(1 + \sqrt{3})^2 + 1](1 - 5) = -20k(5 + 2\sqrt{3}) = 20(5 + 2\sqrt{3}),$$

de modo que $k = -1$. Logo,

$$p(-1) = (-1)[(-1)^2 + 4][(-1 + \sqrt{3})^2 + 1](-1 - 5) = 30(5 - 2\sqrt{3}).$$

**Questão 09 (A):**




Pelos dados do problema, o triângulo é retângulo com hipotenusa $b$. Dos triângulos retângulos $\Delta AT_1O$ e $\Delta AT_2O$, tem-se

$$AO^2 = (c + a_1)^2 + r^2 = (b + a_2)^2 + r^2 \Rightarrow c + a_1 = b + a_2 \Rightarrow a_1 - a_2 = b - c.$$

Como $a = (a_1 + a_2)$, então $a_1 = \frac{a+b-c}{2}$. O ex-incentro $O$ é o encontro das bissetrizes externas. No caso, como $\hat{B} = 90°$, então $\theta = 45°$ e assim

$$r = a_1 = \frac{a + b - c}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}.$$

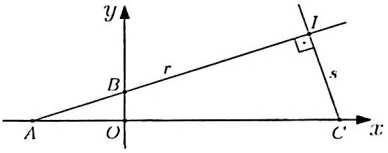
**Questão 10 (B):** O baricentro $G$ do triângulo tem coordenadas

$$G = \frac{A + B + C}{3} = (\frac{4}{3}, 3),$$

de modo que

$$AG = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{97}}{3}.$$

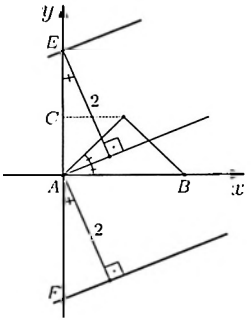
**Questão 11 (D):**




As retas $r$ e $s$ são perpendiculares, pois o produto de seus coeficientes angulares é igual a $-1$. Além disto, na figura acima, têm-se $A = (-3, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (7, 0)$ e a interseção é dada por $I = (6, 3)$. Logo, a área $S$ desejada é igual ao do triângulo retângulo $\Delta AIC$ subtraída da área do triângulo retângulo $\Delta ABO$, ou seja

$$S = \frac{CI \times IA}{2} - \frac{OB \times OA}{2} = \frac{\sqrt{(7-6)^2+3^2} \times \sqrt{(6+3)^2+3^2}}{2} - \frac{3}{2} = 15 - \frac{3}{2} = \frac{27}{2}.$$

**Questão 12 (E):**




A bissetriz interna por $A$ tem coeficiente angular

$$a = \operatorname{tg} 22.5^\circ = \frac{\operatorname{sen} 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ},$$

onde

$$\cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{\cos 45^\circ + 1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

$$\operatorname{sen} 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

de modo que

$$\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} = \sqrt{2}+1.$$

O lugar geométrico desejado é um par de retas com mesmo coeficiente angular $\alpha$ e coeficientes lineares dados por

$$\beta = \pm\frac{2}{\cos 22.5^\circ} = \pm\frac{4}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \pm\frac{4\sqrt{2-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

**Questão 13 (C):** Sejam $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,5,6\}$, $C = \{1,3,5,7\}$ e $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Logo,

- $A \setminus B^C = A \cap B = \{1,2\}$, $A \setminus B^C \setminus C^C = A \cap B \cap C = \{1\}$ e $A \cap (B \cup C) = \{1,2,3\}$, de modo que a primeira afirmação pode ser falsa;
- $A \setminus B^C = \{1,2\}$, $(A \setminus B^C) \setminus C = \{2\}$, $B \cap C^C = \{2,6\}$, $(B \cap C^C)^C = \{1,3,4,5,7,8\}$ e $A \cup (B \cap C^C)^C = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, de modo que a segunda afirmação pode ser falsa;
- $B^C \cup C^C$ denota todos os elementos de $U$ que não pertencem à interseção $B \cap C$. Logo, a terceira afirmação é sempre verdadeira.

**Questão 14 (A):** A partição de um conjunto de $n$ elementos possui $2^n$ elementos, incluindo o conjunto vazio como um de seus elementos.

Como $A$ e $B$ são disjuntos, o único elemento comum às partições individuais desses dois conjuntos é o conjunto vazio. Logo, o conjunto $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ possui $(2^{n(A)} + 2^{n(B)} - 1)$ elementos e assim

$$n(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) + 1 = 2^{n(A)} + 2^{n(B)}.$$

Além disso, como $A$ e $B$ são disjuntos, o conjunto $A \cup B$ tem $(n(A)+n(B))$ elementos e assim

$$n(\mathcal{P}(A \cup B)) = 2^{(n(A)+n(B))}.$$

Logo, devemos ter

$$2^{n(A)} + 2^{n(B)} = 2^{(n(A)+n(B))} \Leftrightarrow 1 + 2^{n(B)-n(A)} = 2^{n(B)}.$$

Como $n(B) \geq 1$, então o lado direito desta relação é par. Assim, para que o lado esquerdo também seja par, devemos, necessariamente, ter $n(A) - n(B) = 0$.

**Questão 15 (C):** Seja $y = a^x$, de forma que a equação do enunciado torna-se

$$y^2 + 2\beta y - \beta = 0.$$

e assim

$$y = a^x = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 + 4\beta}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \beta}.$$

Logo,

- Se $\beta = -1$, então $a^x = 1$, de modo que existe apenas uma solução $x = 0$ real, e a afirmação I é falsa;
- Pelo item acima, a afirmação II é verdadeira;
- Se $\beta = 0$, então $a^x = 0$, de modo que não existe solução real, e a afirmação III é verdadeira;
- Se $\beta = 1$, então $a^x = -1 \pm \sqrt{2}$, de modo que existe apenas uma solução real $x = \log_a(-1 + \sqrt{2})$, e a afirmação IV é falsa.

**Questão 16 (B):** Sejam

$$\theta_1 = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right) \quad \text{e} \quad \theta_2 = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right),$$

de modo que

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \cos\theta_2.$$

e assim, devemos ter

$$\frac{e^{-x} - e^x}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0.$$

**Questão 17 (B):** Para que o produto $\operatorname{sen} x \cos x$ seja positivo, o ângulo $x$ deve pertencer ao primeiro ou terceiro quadrantes. Além disto, devemos ter

$$2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x = \frac{4}{5},$$

de modo que, sendo $\theta = \operatorname{arc\,sen}\frac{4}{5}$ no primeiro quadrante, há quatro possíveis soluções para $x$:

$$\begin{cases} 2x_1 = \theta \\ 2x_2 = \pi - \theta \\ x_3 = 2\pi + \theta \\ 2x_4 = 3\pi - \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\theta}{2} \\ x_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \\ x_3 = \pi + \frac{\theta}{2} \\ x_4 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \end{cases}.$$

Analisando o valor da tangente de cada solução, têm-se:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \\ \operatorname{tg} x_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \\ \operatorname{tg} x_3 = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{-\cos\frac{\theta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \\ \operatorname{tg} x_4 = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

Assim, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ ou $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}$, cujo produto é igual a $P = 1$ e cuja soma $S$ é tal que

$$S = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} = \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right) = \left(\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}.$$

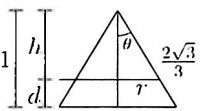
**Questão 18:** **(E)** A soma $S$ do enunciado é tal que

$$\begin{aligned} S &= \cos\alpha + \cos(\alpha + \pi) + \cos(\alpha + 2\pi) + \cos(\alpha + 3\pi) + \ldots + \cos(\alpha + n\pi) \\ &= \cos\alpha - \cos\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha + \ldots + (-1)^n \cos\alpha. \end{aligned}$$

Logo, para $q$ natural,

$$S = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2q + 1 \\ \cos\alpha, & \text{se } n = 2q \end{cases}$$

**Questão 19 (D):**




No cone original, tem-se

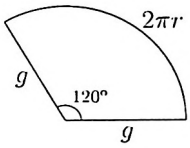
$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ.$$

Se $h$ é a altura do novo cone, o seu raio da base é igual a $r = h\operatorname{tg}\theta$ e o volume deste sólido é tal que

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^3 \operatorname{tg}^2 30^\circ}{3} = \frac{\pi h^4 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{3} = \frac{\pi h^3}{9} = \frac{\pi}{243} \Rightarrow h = \frac{1}{3}.$$

e a distância desejada é $d = 1 - h = \frac{2}{3}$ cm.

**Questão 20 (A):**




A área do setor circular de raio $g$ e ângulo de $120^\circ$ é tal que

$$\frac{\pi g^2}{3} = 3\pi \Rightarrow g = 3.$$

Além disso, se $r$ é o raio da base do cone, o comprimento do arco desse setor circular é tal que

$$\frac{2\pi g}{3} = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{g}{3} = 1.$$

o que nos permite calcular a altura do cone da forma

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}.$$

Logo, a área total e o volume desejados são iguais a

$$S = 3\pi + \pi r^2 = 4\pi,$$
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

**Problema 01:** No grupo do cartão 9, há 4 posições possíveis para o cartão 10, de um total de 9 posições. Logo, a probabilidade desejada é igual a $\frac{4}{9}$.

**Problema 02:** Dividindo a expressão dada $S$ por 2, tem-se

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 2x - \cos 30^\circ \cos 2x = -\cos(30^\circ + 2x).$$

Logo, $S \leq 2$, valor esse alcançado quando

$$\cos(30^\circ + 2x) = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12},$$

com $k$ inteiro.

**Problema 03:** Do enunciado,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x_n \end{bmatrix}.$$

O determinando de $A$ não se altera quando subtraímos a primeira linha de cada linha da matriz. Logo,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix} = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n.$$

de forma que

$$\det A = \frac{1}{2} \times \frac{4}{2} \times \frac{4^2}{2} \times \dots \times \frac{4^{n-1}}{2} = \frac{4^{0+1+2+\dots+(n-1)}}{2^n} = \frac{4^{\frac{(n-1)n}{2}}}{2^n} = 2^{(n-2)n}.$$

Igualando esse valor a 256, tem-se

$$2^{(n-2)n} = 2^8 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Rightarrow n = 4,$$

de modo que a ordem da matriz é igual a $(n+1) = 5$.

**Problema 04:** Das propriedades da função logaritmo,

$$A = \begin{bmatrix} n & 1 & -(-1) \\ n-5 & n & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

e assim

$$\det A = -2n^2 - 25 - 3(n+5) + 5n + 15n + 2(n+5) = -2n^2 + 19n - 30.$$

Igualando essa expressão a 9, tem-se

$$2n^2 - 19n + 39 = 0 \Rightarrow n = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 312}}{4} = \frac{19 \pm 7}{4} = 3,$$

já que $n$ é natural.

Definindo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

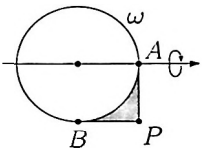
e usando $n = 3$ na definição de $A$, tem-se

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e assim

$$\begin{cases} 3a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1 \\ 8a_{11} + 3a_{21} + 5a_{31} = 0 \\ -5a_{11} - 3a_{21} - 2a_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = -1 \\ a_{31} = -1 \end{cases} \Rightarrow a_{11} + a_{21} + a_{31} = -1.$$

**Problema 05:**




O sólido formado é um cilindro de raio $PA = 2$ e altura $PB = 2$ subtraído de uma hemisfera de raio $PB$. Assim:

a) A área total da superfície deste sólido é igual à área da base do cilindro mais a área lateral do cilindro mais a área da hemisfera, ou seja,

$$S_T = \pi PA^2 + 2\pi PA\, PB + \frac{4\pi PA^2}{2} = 4\pi + 8\pi + 8\pi = 20\pi \text{ cm}^2.$$

b) O volume do sólido é o volume do cilindro menos o volume da hemisfera, isto é,

$$V = \pi PA^2\, PB - \frac{4}{6}\pi PB^3 = 8\pi - \frac{16}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi \text{ cm}^3.$$

**Problema 06:** As interseções, duas a duas, das retas dadas são

$$\begin{cases} r: x - 3y - 3 = 0 \\ s: x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (3, 2),$$

$$\begin{cases} r: x - 3y + 3 = 0 \\ t: x + 7y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (0, 1),$$

$$\begin{cases} s: x + 2y - 7 = 0 \\ t: x + 7y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (7, 0),$$

de modo que

$$\begin{cases} AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\ AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \\ BC = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} \end{cases}.$$

Determinando o ângulo $\theta$ entre $AB$ e $AC$, tem-se, pela lei dos cossenos, que

$$\begin{aligned} BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,AC\cos\theta &\Rightarrow 50 = 10 + 20 - 20\sqrt{2}\cos\theta \\ &\Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Rightarrow \theta = 135^\circ. \end{aligned}$$

Com isto, a área do triângulo $\Delta ABC$ é igual a

$$S_{ABC} = \frac{AB\,AC}{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{10\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5,$$

de forma que:

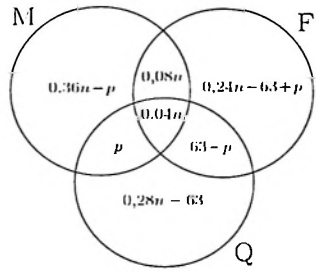
a) A área total da superfície do prisma de altura $h = 2$ é

$$S_T = 2S_{ABC} + (AB + AC + BC)h = 10 + 2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})\sqrt{10}.$$

b) O volume do prisma é dado por

$$V = S_{ABC}h = 10.$$

**Problema 07:**




Mapeando os dados do enunciado no diagrama de Venn acima, tem-se

$$n = 0{,}48n + 0{,}24n + 0{,}28n - 63 \Rightarrow 0 = -63,$$

o que indica uma inconsistência nos dados do problema.

**Problema 08:** Como a derivada de $f(x)$ é tal que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x > 0, & \text{para } x > 0 \\ -2x > 0, & \text{para } x < 0 \end{cases},$$

então $f(x)$ é sempre crescente para todo valor $x \neq 0$. Com isto, valores distintos de $x$ geram valores distintos de $f(x)$.

Como

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 3.$$

a função é contínua em $x = 0$ e consequentemente para todos valores de $x$. Além disso, como

$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} = \infty.$$

então $f(x)$ assume todos os valores reais.

Logo, $f(x)$ é bijetora, com inversa dada por

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{3 - x}, & \text{para } x < 3 \\ \sqrt{x - 3}, & \text{para } x \geq 3 \end{cases}.$$

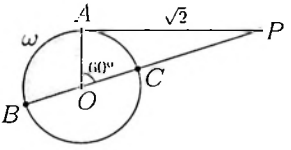
**Problema 09:** Pela definição de logaritmo, devemos ter $\operatorname{tg}\theta > 0$, $\operatorname{tg}\theta \neq 1$ e ainda

$$(\operatorname{sen}\theta)\log_{\operatorname{tg}\theta} e \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \frac{\ln e}{\ln \operatorname{tg}\theta} \geq 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta}{\ln \operatorname{tg}\theta} \geq 0.$$

Assim, devemos ter

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta \geq 0 \text{ e } \ln \operatorname{tg}\theta > 0 \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen}\theta \leq 0 \text{ e } \ln \operatorname{tg}\theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta \geq 0 \text{ e } \operatorname{tg}\theta > 1 \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen}\theta \leq 0 \text{ e } 0 < \operatorname{tg}\theta < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \pi < \theta < \frac{5\pi}{4} \end{cases}.$$

**Problema 10:**




Do triângulo retângulo $\Delta OAP$,

$$AO = \frac{AP}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Com isto, a área desejada é dada por

$$S = \frac{\pi AO^2}{3} = \frac{2\pi}{9}.$$

# II.3 Vestibular 2011

**Questão 01 (B):** Escrevendo $z$ em coordenadas polares, têm-se

$$\begin{cases} z = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ = e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \\ z^3 = e^{i2\pi} = 1 \end{cases}$$

de modo que $(z_1 + z_2 + z_3) = 0$. Considerando ainda que

$$\begin{cases} z = z^4 = z^7 = \dots \\ z^2 = z^5 = z^8 = \dots \\ z^3 = z^6 = z^9 = \dots \end{cases}.$$

tem-se

$$\sum_{n=1}^{89} z^n = \sum_{n=88}^{89} z^n = \sum_{n=1}^{2} z^n = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i) - \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) = -1.$$

**Questão 02 (C):**

- Sejam $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$, então $|z_1 - z_2| = 2$ e $||z_1| - |z_2|| = 0$, e a afirmação I é falsa;
- Colocando $z_1 = 0$ e $z_2 \neq 0$, percebe-se logo que a afirmação II é falsa;
- Usando a notação exponencial, $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}e^{-i\theta} = (\cos -\theta + i \operatorname{sen} -\theta)$, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 03 (E):** Escrevendo $z = a + bi$, a equação do enunciado torna-se

$$a^2+2abi-b^2+a^2+b^2+ai-b-1=0 \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = b+1 \\ 2ab+a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ e } b = -1 \\ \text{ou} \\ b = -\frac{1}{2} \text{ e } a^2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Logo, a soma desejada é igual a

$$(-i) + \frac{1}{2}(1-i) + \frac{1}{2}(-1-i) = -2i.$$

**Questão 04 (X):** A probabilidade de se tirar uma moeda com duas coroas é $P(\text{coroa, coroa}) = \frac{25}{40}$. A probabilidade de se tirar coroa é $P(\text{coroa}) = \frac{10\times1+25\times2}{80} = \frac{60}{80}$. Assim, pela definição de probabilidade condicional, a probabilidade desejada é igual a

$$P(\text{coroa}|\text{coroa}) = \frac{P(\text{coroa, coroa})}{P(\text{coroa})} = \frac{\frac{25}{40}}{\frac{60}{80}} = \frac{5}{6}.$$

**Questão 05 (A):** Do enunciado, $B$ possui exatamente 128 elementos não pertencentes ao seu subconjunto $A$, de modo que $n(B) - n(A) = 128$. Logo:

- A afirmação I é verdadeira;
- $n(B) = 128 + n(A)$, e a afirmação II é falsa;
- Existem infinitas duplas ordenadas $(n(A), n(B))$, e a afirmação III é falsa.

**Questão 06 (B):** Modificando o sistema (multiplicando a segunda equação por 2 e subtraindo-a da primeira e adicionando as segunda e terceira equações), tém-se

$$\begin{cases} x - z = a - 2b \\ 3x + (2 - 5c)z = b \end{cases} \Rightarrow 5(1 - c)z = -3a + 7b.$$

Assim, o sistema só é possível se $c \neq 1$ ou se $a = \frac{7b}{3}$.

**Questão 07 (E):**

- Se $M$ é não-inversível, suas colunas são linearmente dependentes. Assim, podemos combinar os elementos de cada linha de $M$ (usando coeficientes não nulos que formariam a matriz $N$) para dar um resultado nulo, de modo que a afirmação I é verdadeira;
- Se $\det(M^2 - M) = 0$, com $\det M \neq 0$, então $\det(M - I) = 0$. Logo, $\lambda = 1$ é autovalor de $M$, cujo autovetor $X$, não nulo, satisfaz $MX = X$, e a afirmação II é verdadeira;
- Considerando que $\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} = \operatorname{sen}\theta$, para $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, com $k$ inteiro, e $\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) = \cos\theta$, para todo $\theta$, o determinante $D$ da matriz do item III é igual a

  $$\det D = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1,$$

  de modo que a matriz é de fato inversível para todo $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 08 (C):** Como $x = 1$ é raiz dupla de $f(x) = x^4 + x^2 + ax + b$, então devemos ter $f(1) = f'(1) = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} (1)^4 + (1)^2 + a(1) + b = 0 \\ 4(1)^3 + 2(1) + a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -6 \text{ e } b = 4.$$

de modo que $a^2 - b^3 = (36 - 64) = -28$.

**Questão 09 (A):** Seja o primeiro caso:

$$x^2 - 3x + 2 = 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Testando essas raízes na equação inicial,

$$\begin{cases} \left|\left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right) + 2\right| = \left|\frac{5}{2}(3 \pm \sqrt{5}) - \frac{3}{2}(5 \pm \sqrt{5}) + 2\right| = |2 \mp \sqrt{5}| \\ \left|2\left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right) - 3\right| = |2 \pm \sqrt{5}| \end{cases}$$

de modo que ambas são também raízes da equação original.

No segundo caso, tem-se

$$x^2 - 3x + 2 = -(2x - 3) \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Testando essas raízes na equação inicial,

$$\begin{cases} \left|\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right) + 2\right| = \left|\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) - \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{5}) + 2\right| = |2 \mp \sqrt{5}| \\ \left|2\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right) - 3\right| = |-2 \pm \sqrt{5}| \end{cases}$$

de modo que ambos valores de $x$ são também raízes da equação original.

Logo, o produto de todas as raízes reais é igual a

$$P = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{25 - 5}{4} \times \frac{1 - 5}{4} = -5.$$

**Questão 10 (A):** Pelo enunciado, devemos ter

$$\begin{cases} -a_1^3 + a_2^2 - a_3 = 0 \\ a_1 = 2 \\ a_1 a_3 = a_2^2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2^2 - a_3 = 8 \\ 2a_3 = a_2^2 \\ a_2 + a_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow a_3 = 8 \text{ e } a_2 = -4.$$

Logo, a equação algébrica do enunciado é da forma

$$(x-2)^3 + (x+4)^2 + (x-8) = 0 \equiv x^3 - 5x^2 + 21x = 0.$$

de modo que a soma de todas as raízes é igual a 5.
**Obs.:** As outras raízes, além de $x = 0$, são

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 84}}{2},$$

que são complexas e somam 5.

**Questão 11 (D):** A equação do enunciado pode ser reescrita como

$$(4e^{2x} - 16e^x + 16) + (9e^{2y} - 54e^y + 81) = 36 \equiv 4(e^x - 2)^2 + 9(e^y - 3)^2 - 36.$$

que, no plano $(e^x, e^y)$, equivale a uma elipse de centro $(2, 3)$. Para cada ponto $(e^{x_0}, e^{y_0})$ dessa elipse no primeiro quadrante do plano $(e^x, e^y)$, existe uma solução real $(x_0, y_0)$ da equação original, que, por isto mesmo, possui um número infinito de soluções.

**Questão 12 (E):** Por inspeção, $x = 1$ é raiz do polinômio dado, que pode ser desenvolvido da forma

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 &= (x-1)(2x^3 - x^2 - 4x + 2) \\ &= (x-1)[x^2(2x-1) - 2(2x-1)] \\ &= (x-1)(x^2-2)(2x-1). \end{aligned}$$

Logo, podemos afirmar que há uma única raiz ($x = \frac{1}{2}$) em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e há pelo menos uma outra raiz ($x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$) em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Questão 13 (D):** Completando os quadrados, a equação do enunciado pode ser reescrita como

$$x^2+\frac{m}{36}x+\frac{m^2}{72^2}+y^2+\frac{n}{36}y+\frac{n^2}{72^2}=\frac{23}{36}+\frac{m^2+n^2}{72^2}$$
$$\equiv \left(x+\frac{m}{72}\right)^2+\left(y+\frac{n}{72}\right)^2=\frac{23}{36}+\frac{m^2+n^2}{72^2}.$$

que representa uma circunferência de centro $C=\left(-\frac{m}{72},-\frac{n}{72}\right)$ e raio

$$r=\sqrt{\frac{23}{36}+\frac{m^2+n^2}{72^2}}=1\Rightarrow m^2+n^2=\frac{72^2\times 13}{36}.$$

Como $C$ pertence ao segundo quadrante, têm-se $m>0$ e $n<0$. Além disso, da relação $m=-\frac{2n}{3}$, tem-se

$$\frac{4n^2}{9}+n^2=\frac{72^2\times 13}{36}\Rightarrow n^2=36^2\Rightarrow n=-36\text{ e }m=24.$$

de modo que $C=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$. Colocando $x=0$ na equação original para determinar os pontos $A$ e $B$, tem-se

$$36y^2-36y-23=0\Rightarrow y=\frac{36\pm\sqrt{36^2-4\times 36\times 23}}{72}=\frac{3\pm 4\sqrt{2}}{6}.$$

de modo que $A=\left(0,\frac{3+4\sqrt{2}}{6}\right)$, $B=\left(0,\frac{3-4\sqrt{2}}{6}\right)$ e $AB=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Da simetria do problema, o triângulo $\Delta ABC$ é isósceles e a altura $h$ do vértice $C$ em relação à base $AB$ é igual a

$$h=\sqrt{1-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{ABC}=2\times\frac{h\times\frac{AB}{2}}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

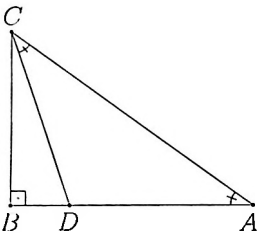
**Questão 14 (C):** A velocidade angular do ponteiro dos minutos é 12 vezes a velocidade do ponteiro das horas. Enquanto que o ponteiro dos minutos dá uma volta completa, o ponteiro das horas percorre um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos. Para juntar os ponteiros novamente, o ponteiro dos minutos deve percorrer $\frac{\pi}{6}+\theta$ no mesmo tempo que o ponteiro das horas percorre $\theta$. Assim, devemos ter

$$\frac{\frac{\pi}{6}+\theta}{12}=\theta\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{66}.$$

e o ponteiro dos minutos percorre um ângulo total igual a

$$2\pi+\frac{\pi}{6}+\theta=\frac{144}{66}\pi=\frac{24}{11}\pi.$$

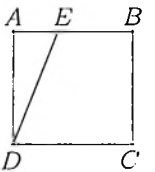
**Questão 15 (D):**




Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $\Delta BCD$, tem-se

$$CD^2 = BD^2 + CB^2 \Rightarrow AD^2 = (8 - AD)^2 + 36 \Rightarrow 16AD = 100 \Rightarrow AD = \frac{25}{4}.$$

**Questão 16 (C):**



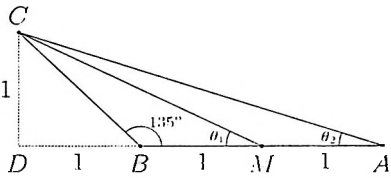

Das condições do problema,

$$\begin{cases} S_{ADE} + S_{BEDC} = S_{ABCD} \\ S_{ADE} + S_{ABCD} = 2S_{BEDC} \\ S_{ADE} + S_{BEDC} + S_{ABCD} = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{ABCD} = 100 \\ S_{BEDC} = \frac{200}{3} \end{cases}.$$

de modo que, se $\ell$ é o lado do quadrado,

$$\begin{cases} \ell^2 = 100 \\ \frac{\ell + (\ell - AE)}{2}\ell = \frac{200}{3} \end{cases} \Rightarrow AE = \frac{20}{3}.$$

**Questão 17 (B):**

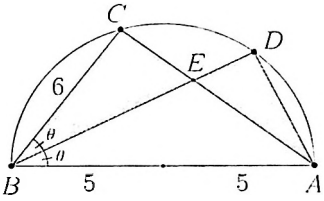



Seja $D$ o pé da altura relativa ao lado AB. Dos triângulos retângulos $\Delta MDC$ e $\Delta ADC$, têm-se

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{CD}{MD} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta_1+\theta_2) = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2}{1-\operatorname{tg}\theta_1\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1.$$

de modo que $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4}$.

**Questão 18 (A):**




Seja $E$ a interseção de $AC$ com $BD$. Pelo teorema re Pitágoras, $AC = 8$, e pelo teorema das bissetrizes

$$\frac{EC}{BC} = \frac{EA}{AB} = \frac{AC}{BC+AB} \Rightarrow EC = \frac{AC\times BC}{BC+AB} = \frac{8\times 6}{6+10} = 3$$
$$\Rightarrow EA = AC - EC = 5.$$

Além disso, se $\theta$ é o ângulo marcado na figura,

$$\cos 2\theta = \cos A\hat{B}C = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

e assim

$$AD = AB\operatorname{sen}\theta = AB\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = 10\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = 2\sqrt{5}.$$

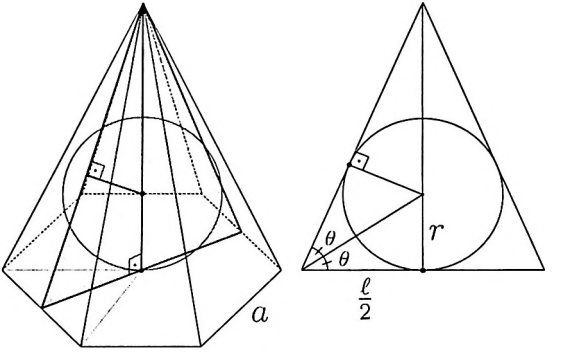
de forma que, pelo teorema de Pitágoras,

$$ED = \sqrt{EA^2 - AD^2} = \sqrt{25 - 20} = \sqrt{5}.$$

A área desejada $S$ é a área sombreada na figura acima, ou seja,

$$S = S_{BCE} + S_{ADE} = \frac{BC \times EC}{2} + \frac{ED \times AD}{2} = \frac{6 \times 3}{2} + \frac{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{2} = 9 + 5 = 14.$$

**Questão 19 (E):**




No triângulo destacado na figura acima, a metade $\frac{\ell}{2}$ do comprimento de sua base é igual ao apotema da base da pirâmide de aresta $a$, ou seja,

$$\frac{\ell}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}}{2} = 5.$$

Com isto,

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{12}{5} = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta} \Rightarrow 6\operatorname{tg}^2\theta + 5\operatorname{tg}\theta - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12}.$$

Logo, descartando o valor negativo para $\operatorname{tg}\theta$, o raio desejado $r$ é dado por

$$r = \frac{\ell}{2}\operatorname{tg}\theta = 5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

**Questão 20 (C):**

- A soma das faces de um triedro deve ser menor do que $360°$, de forma que a afirmação I é incorreta e a afirmação II é correta;
- O poliedro do item III tem $F = 7$ faces e $A = (3 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 5 + 2 \times 6)/2 = 15$ arestas. Assim, pela relação de Euler, este poliedro deve ter $V = A + 2 - F = 10$ vértices, e a afirmação III é incorreta;
- Considere um poliedro convexo de $F$ faces, cada uma com $A_i$ arestas, para $i = 1, 2, \ldots, F$, de modo que o número total $A$ de arestas é igual a

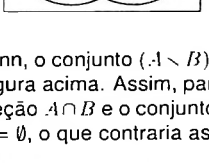
$$A = \frac{\sum_{i=1}^{F} A_i}{2},$$

e a soma $S$ dos ângulos de todas as faces é igual a

$$S = \sum_{i=1}^{F} (A_i - 2)180° = (2A - 2F)180° = 2(V - 2)180° = 2880°.$$

e a afirmação IV é correta.

**Problema 01:**




Usando diagramas de Venn, o conjunto $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ é representado pela região sombreada na figura acima. Assim, para que esse conjunto seja igual ao conjunto $A$, a interseção $A \cap B$ e o conjunto $B \setminus A$ devem ser ambos vazios. Isto equivaleria a $B = \emptyset$, o que contraria as condições do problema.

**Problema 02:** As raízes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de $z^n = 1$ estão igualmente espaçadas sobre o círculo de raio unitário no plano complexo $\mathbb{C}$. Assim, sem perda de generalidade, podemos escrever que

$$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad z_3 = e^{i\frac{4\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad z_n = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

Assim, os valores de $|z_i - z_j|$, para $i \neq j$, são os comprimentos do lado e das diagonais do $n$-ágono regular, que, para $n$ ímpar, assumem $(1 + \frac{n-1}{2}) = \frac{n+1}{2}$ valores distintos.

**Problema 03:** Há um total de 11! permutações de todos os livros, 5! permutações para os livros de história, 4! para os livros de biologia e 2! para os livros de espanhol. Além disso, há 3! possibilidades para as ordens dos três assuntos, de forma que a probabilidade desejada é igual a

$$P = \frac{5! \times 4! \times 2! \times 3!}{11!} = \frac{1}{1155}.$$

**Problema 04:** Desenvolvendo a equação do enunciado, têm-se

$$\begin{aligned}
4^2 < 4^{-\log_{\frac{1}{5}} x^2 - x + 19} &\Rightarrow 2 < -\log_{\frac{1}{5}} x^2 - x + 19 \\
&\Rightarrow -2 > \log_{\frac{1}{5}} x^2 - x + 19 \\
&\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} < x^2 - x + 19 \\
&\Rightarrow x^2 - x + 19 - 25 > 0 \\
&\Rightarrow (x-3)(x+2) > 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} (x-3) > 0 \text{ e } (x+2) > 0 \\ \text{ou} \\ (x-3) < 0 \text{ e } (x+2) < 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \text{ou} \\ x < -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

**Problema 05:** Fazendo

$$\begin{bmatrix} m_a & m_b \\ m_c & m_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_a & n_b \\ n_c & n_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_a & n_b \\ n_c & n_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_a & m_b \\ m_c & m_d \end{bmatrix},$$

devemos ter

$$\begin{cases} m_a n_a + m_b n_c = n_a m_a + n_b m_c \\ m_a n_b + m_b n_d = n_a m_b + n_b m_d \\ m_c n_a + m_d n_c = n_c m_a + n_d m_c \\ m_c n_b + m_d n_d = n_c m_b + n_d m_d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_b n_c = n_b m_c \\ m_a n_b + m_b n_d = n_a m_b + n_b m_d \\ m_c n_a + m_d n_c = n_c m_a + n_d m_c \end{cases}.$$

A relação $m_b n_c = n_b m_c$ deve ser válida para todos os possíveis valores de $m_b$ e $n_c$, inclusive $m_b = 0$ (e então $m_c = 0$) e $n_c = 0$ (de modo que $m_c = 0$). Com isto, as demais relações simplificam-se para

$$\begin{cases} m_a n_b = n_b m_d \\ m_d n_c = n_c m_a \end{cases} \Rightarrow m_a = m_d.$$

e $M$ é da forma $M = kI$, onde $k \in \mathbb{R}$ e $I$ é a matriz identidade de ordem 2.

**Problema 06:** Para que as raízes sejam positivas, devemos ter seus produto $P$ e soma $S$ positivos, ou seja,

$$-\frac{2m}{2-m} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2m < 0 \text{ e } 2-m > 0 \\ \text{ou} \\ 2m > 0 \text{ e } 2-m < 0 \end{cases} \Rightarrow m < 0 \text{ ou } m > 2.$$

$$\frac{m+2}{2-m} > 0 \Rightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \text{ e } 2-m > 0 \\ \text{ou} \\ m+2 < 0 \text{ e } 2-m < 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < m < 2.$$

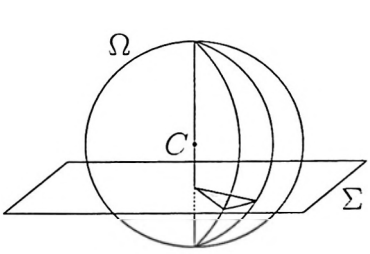
Além disso, para que as raízes sejam reais e distintas o discriminante da equação original deve ser positivo, ou seja,

$$\begin{aligned} (2m)^2 - 4(2-m)(m+2) > 0 &\Rightarrow 8m^2 - 16 > 0 \\ &\Rightarrow m^2 > 2 \\ &\Rightarrow m < -\sqrt{2} \text{ ou } m > \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Juntando as três restrições anteriores, têm-se

$$\begin{cases} m < 0 \text{ ou } m > 2 \\ -2 < m < 2 \\ m < -\sqrt{2} \text{ ou } m > \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow -2 < m < -\sqrt{2}.$$

**Problema 07:**




A interseção da esfera $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = 36$ com o plano $\Sigma : z = -2$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 32$, de raio $\sqrt{32}$. A área desejada $S$ corresponde a um setor circular de 30° dessa circunferência, de modo que

$$S = \frac{\pi(\sqrt{32})^2}{12} = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}^2.$$

**Problema 08:**

a) Usando as relações trigonométricas do arco-dobro, a expressão do enunciado pode ser reescrita como

$$\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10} - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \cos\frac{5\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

b) Do item anterior,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} &= \frac{\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}} \times \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}} \\ &= \frac{\cos\frac{2\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}}{4\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}} \times \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{\cos\frac{2\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}}{8\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}}{16\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}},\end{aligned}$$

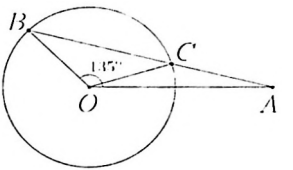
de modo que

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 = \frac{\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}}{16\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right)}{16\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{16}.$$

Como $\frac{\pi}{10}$ e $\frac{\pi}{5}$ estão no primeiro quadrante, então

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}.$$

**Problema 09:**




a) Pela lei dos senos no triângulo $\Delta ABC$,

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} A\hat{O}B} = \frac{OB}{\operatorname{sen} O\hat{A}B} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 135^\circ} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\operatorname{sen} O\hat{A}B} \Rightarrow \operatorname{sen} O\hat{A}B = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Usando a fórmula do arco-metade,

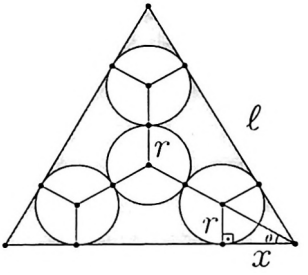
$$\operatorname{sen} 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

de modo que $O\hat{A}B = 15^\circ$.

b) Dos dados do problema,

$$\begin{aligned} OB = OC &\Rightarrow O\hat{C}B = O\hat{B}C = 180^\circ - (O\hat{A}C + A\hat{O}B) = 30^\circ \\ &\Rightarrow O\hat{C}A = 180^\circ - O\hat{C}B = 150^\circ \\ &\Rightarrow C\hat{O}A = 180^\circ - (O\hat{A}C + O\hat{C}A) = 15^\circ \\ &\Rightarrow AC = OC = OB = \sqrt{2-\sqrt{3}}\ \text{cm}. \end{aligned}$$

**Problema 10:**




a) Do triângulo em destaque,

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{\operatorname{sen}30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = r\sqrt{3},$$

de forma que

$$\ell = 2x + 2(2r\cos 30^\circ) = 2r\sqrt{3} + 4r\frac{\sqrt{3}}{2} = 4r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{\ell}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\text{ cm}.$$

b) Trivialmente,

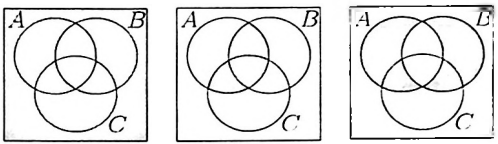
$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - 4(\pi r^2) = (3\sqrt{3} - \pi)\text{ cm}^2.$$

c) Ainda pelo triângulo em destaque, a distância desejada é

$$d = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{r^2 + 3r^2} = 2r = 1\text{ cm}.$$

# II.4 Vestibular 2010

**Questão 01 (E):**




*I.* *II.* *III.*

As regiões de cada item são indicadas na figura acima, sendo que para a afirmação I é mostrada a região $(A \cap B)^C = (A^C \cup B^C)$, de modo que as três afirmações são verdadeiras.

**Questão 02 (C):** Analisando os domínios de cada função dada no enunciado, têm-se

$$A \cup B : x - \sqrt{\pi} > 0 \Rightarrow x > \sqrt{\pi}.$$

$$A \cap C : -x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Rightarrow -(x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4.$$

$$B \cap C : \frac{x-\pi}{5-x} \geq 0 \text{ e } x \neq 5 \Rightarrow \begin{cases} x - \pi \geq 0 \text{ e } 5 - x > 0 \\ \text{ou} \\ x \leq \pi \text{ e } 5 - x < 0 \end{cases} \Rightarrow \pi \leq x < 5.$$

Logo, como $C$ é subconjunto de $A \cup B$,

$$C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = [2, 5[ \subset (A \cup B) = ]\sqrt{\pi}, \infty[.$$

**Questão 03 (E):** Desenvolvendo o lado direito $D$ da equação do enunciado.

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{3^{12}}\left[(2-\sqrt{2}) - i(2+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-1)i + (\sqrt{2}+1)\right]^{12} \\ &= -\frac{1}{3^{12}}(3-3i)^{12} \\ &= -(1-i)^{12} \\ &= -\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]^{12} \\ &= -2^6\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} \\ &= -64e^{-3i\pi} \\ &= 64. \end{aligned}$$

Assim, escrevendo $z = a + bi$, devemos ter

$$(a+bi)-(a-bi)+(a^2+b^2)=64 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=64 \\ 2bi=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow b=0 \text{ e } a^2=64$$
$$\Rightarrow z=\pm 8,$$

de modo que

$$\left|z+\frac{1}{z}\right| = 8+\frac{1}{8} > 8.$$

**Obs:** $i(z-\bar{z}) = i(\pm 8 \mp 8) = 0.$

**Questão 04 (C):** Escrevendo $z = a + bi$, têm-se

$$i(a-bi)+3(a-bi)+(2a)^2-i=0 \Rightarrow \begin{cases} -b+3a+4a^2=0 \\ a-3b-1=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a-3(3a+4a^2)-1=0$$
$$\Rightarrow -12a^2-8a-1=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{-24}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \text{ e } b=-\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ a=-\frac{1}{6} \text{ e } b=-\frac{7}{18} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} \\ \text{ou} \\ z=\frac{\sqrt{58}}{18}e^{-\arctg\frac{7}{3}i} \end{cases},$$

de modo que

$$\arg z \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[ .$$

**Questão 05 (D):** Usando a expressão para soma de progressão aritmética,

$$\begin{cases} \frac{a_1+(a_1+9d)}{2}\times 10 = 10+25d \\ \frac{a_1+(a_1+49d)}{2}\times 50 = 4550 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a_1+20d=10 \\ 50a_1+1225d=4550 \end{cases}$$
$$\Rightarrow d=4 \text{ e } a_1=-7$$
$$\Rightarrow d-a_1=11.$$

**Questão 06 (D):**

- $f(-x).g(-x) = f(x).(-g(x)) = -f(x).g(x)$, de forma que $f.g$ é ímpar e a firmação I é verdadeira;
- $f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$, de forma que $f \circ g$ é par e a afirmação II é verdadeira;
- $g(f(-x)) = g(f(x))$, de forma que $g \circ f$ é par e a afirmação III é falsa.

**Questão 07 (B):** Tirando a tangente de ambos lados da equação do enunciado, têm-se

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}(e^x+2) - \operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)\right] = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\\
\Rightarrow\ &\frac{\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(e^x+2)] - \operatorname{tg}\left[\operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)\right]}{1+\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(e^x+2)]\operatorname{tg}\left[\operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)\right]} = 1\\
\Rightarrow\ &\frac{(e^x+2) - \left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)}{1+(e^x+2)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)} = 1\\
\Rightarrow\ &\frac{2e^x+1}{e^x+(e^x+2)(e^{2x}-1)} = 1\\
\Rightarrow\ &e^x+1 = (e^x+2)(e^x-1)(e^x+1)\\
\Rightarrow\ &(e^x+2)(e^x-1) = 1\\
\Rightarrow\ &e^{2x}+e^x-3 = 0\\
\Rightarrow\ &e^x = \frac{-1+\sqrt{1+12}}{2}\\
\Rightarrow\ &x = \ln\frac{\sqrt{13}-1}{2},
\end{aligned}$$

que é uma raiz positiva pois $\frac{\sqrt{13}-1}{2} > 1$.

**Questão 08 (C):** Se $x = -i$ é raiz, então $p(-i) = 0$, e assim

$$\begin{aligned}
(-i)^5 - a(-i)^3 + a(-i)^2 - 1 = 0 &\Rightarrow -i^5 + ai^3 - a - 1 = 0\\
&\Rightarrow -i - ai - a - 1 = 0\\
&\Rightarrow a = -1.
\end{aligned}$$

de modo que

$$p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1 = (x^3-1)(x^2+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x^2+1).$$

Dessa forma, as demais raízes de $p(x)$ são $x = 1$, $x = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ e $x = i$, de modo que apenas a afirmação III é verdadeira.

**Questão 09 (A):** Resolvendo o sistema, têm-se $a = 2$, $b = \frac{3}{2}$ e $c = -1$, de modo que $p(x)$ pode ser escrito como

$$p(x) = 4(x-2)(x-\frac{3}{2})^2(x+1)^2.$$

e assim

$$p(1) = 4(-1)(1-\frac{3}{2})^2(2)^2 = -4.$$

**Questão 10 (E):** Pela definição de $a_n$,

$$\begin{cases} a_1 = 1 + i(-1) = 1 - i \\ a_2 = 1 + i(1-i) = 2 + i \\ a_3 = 1 + i(2+i) = 2i \\ a_4 = 1 + i(2i) = -1 = a_0 \end{cases}$$

de modo que $a_n = a_{n-4}$, para $n = 4, 5, \ldots, 15$. Com isto:

- O valor de $p(-1)$ é igual a

$$\begin{aligned} p(-1) &= \sum_{n=0}^{15} a_n(-1)^n \\ &= 4\sum_{n=0}^{3} a_n(-1)^n \\ &= 4[(-1) - (1-i) + (2+i) - (2i)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

  e a afirmação I não é verdadeira;
- Para $x \in [-1, 1]$, p valor de $|p(x)|$ é tal que

$$|p(x)| = \left|\sum_{n=0}^{15} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{15} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{15} |a_n|,$$

  de modo que

$$|p(x)| \leq 4\sum_{n=0}^{3} |a_n| = 4(|-1| + |1-i| + |2+i| + |2i|) = 4(3+\sqrt{2}+\sqrt{5}),$$

  e a afirmação II é verdadeira;
- Do desenvolvimento acima, $a_8 = a_4 = a_0 = -1$, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 11 (B):** Desenvolvendo a expressão $E$ do enunciado, tem-se

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=0}^{5} C_i^5 (2\sqrt{3})^{5-i} (\sqrt{5})^i - \sum_{i=0}^{5} C_i^5 (2\sqrt{3})^{5-i} (-\sqrt{5})^i \\ &= 2\left[C_1^5 (2\sqrt{3})^4 (\sqrt{5})^1 + C_3^5 (2\sqrt{3})^2 (\sqrt{5})^3 + C_5^5 (\sqrt{5})^5\right] \\ &= 2(720\sqrt{5} + 600\sqrt{5} + 25\sqrt{5}) \\ &= 2690\sqrt{5}. \end{aligned}$$

**Questão 12 (A):** A probabilidade de exatamente $n$ refletores estarem acesos simultaneamente é $P_n = C_n^6 p^n (1-p)^{6-n}$, onde $p = \frac{2}{3}$ é a probabilidade de um dado refletor estar aceso. Assim, a probabilidade desejada é igual a

$$P = P_4 + P_5 = \frac{6!}{4!\,2!} \times \frac{2^4}{3^6} + \frac{6!}{5!\,1!} \times \frac{2^5}{3^6} = \frac{15 \times 2^4 + 6 \times 2^5}{3^6} = \frac{432}{729} = \frac{16}{27}.$$

**Questão 13 (D):** Como $\det A = a_1\, a_4\, a_6$, então devemos ter

$$\begin{cases} 10a_1(a_1 + 5d) = -1000 \\ a_1 + 3d = 10 \end{cases} \Rightarrow a_1[3a_1 + (50 - 5a_1)] = -300$$

$$\Rightarrow a_1^2 - 25a_1 - 150 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 600}}{2} = \frac{25 \pm 35}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 30 \text{ e } d = -\frac{20}{3} \\ \text{ou} \\ a_1 = -5 \text{ e } d = 5 \end{cases}.$$

Logo, como $d > 0$, tem-se

$$\frac{a_1}{d} = \frac{-5}{5} = -1.$$

**Questão 14 (C):** Usando a expressão para soma de progressão geométrica,

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{3^4-1}{3-1} = 80 \\ y_1 \dfrac{4^4-1}{4-1} = 255 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 18, x_4 = 54 \\ y_1 = 3, y_2 = 12, y_3 = 48, y_4 = 192 \end{cases}.$$

Assim, usando Laplace na última linha de $A$, tem-se

$$\det A = -\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(x_2 y_3 - y_2 x_3) = -(6\times 48 - 12\times 18) = -72.$$

de modo que

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{72}.$$

Além disso, podemos escrever que

$$\begin{bmatrix} (A^{-1})_{11} & (A^{-1})_{12} & (A^{-1})_{13} & (A^{-1})_{14} \\ (A^{-1})_{21} & (A^{-1})_{22} & (A^{-1})_{24} & (A^{-1})_{21} \\ (A^{-1})_{41} & (A^{-1})_{42} & (A^{-1})_{43} & (A^{-1})_{44} \\ (A^{-1})_{41} & (A^{-1})_{42} & (A^{-1})_{43} & (A^{-1})_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6(A^{-1})_{21} + 12(A^{-1})_{22} = 1 \\ 18(A^{-1})_{21} + 48(A^{-1})_{22} = 0 \\ 54(A^{-1})_{21} + 192(A^{-1})_{22} + (A^{-1})_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})_{21} = \frac{2}{3}, (A^{-1})_{22} = -\frac{1}{4} \text{ e } (A^{-1})_{23} = 12.$$

**Questão 15 (A):** Usando a expressão de transformação em produto,

$$2\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2),$$

com $\theta_1 = \frac{\alpha}{3^n}$ e $\theta_2 = \frac{\alpha}{3^n}$, a soma $S$ do enunciado pode ser escrita como

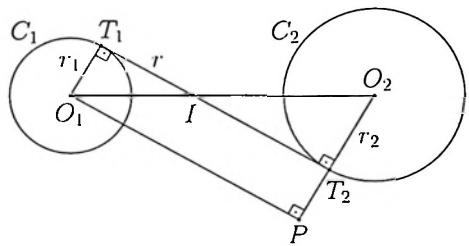
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{6}\left(\cos\frac{\alpha}{3^n} - \cos\frac{3\alpha}{3^n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{6}\left(\cos\frac{\alpha}{3^n} - \cos\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{3^6} - \cos\frac{\alpha}{3^0}\right). \end{aligned}$$

**Questão 16 (B):** Usando transformação em produto,

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

que é maximizada quando $\alpha = \beta$, de modo que devemos ter $\alpha = \beta = \frac{2\pi}{3}$.

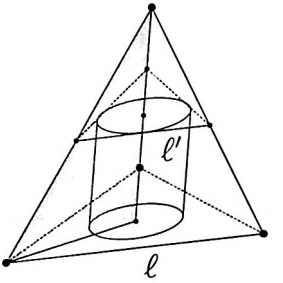
**Questão 17 (A):**




Do enunciado, as circunferências $C_1$ e $C_2$ têm raios $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$, respectivamente, e ainda $O_1O_2 = \sqrt{(10-4)^2 + (11-3)^2} = 10$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $\Delta O_1PO_2$, tem-se

$$T_1T_2 = O_1P = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2P^2} = \sqrt{10^2 - (r_1+r_2)^2} = \sqrt{100-25} = 5\sqrt{3}.$$

**Questão 18 (D):**




Do triângulo em destaque, a altura $H$ do tetraedro de aresta $\ell$ é tal que

$$\ell^2 = H^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow H = \ell\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}.$$

Determinando o lado $\ell'$ do triângulo no qual a base superior do cilindro está inscrita, tem-se

$$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{H-h}{H} \Rightarrow \ell' = \frac{3\left(\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}{\sqrt{6}} = 2,$$

onde $h$ é a altura do cilindro. Com isto, o raio $r$ da base do cilindro é igual a

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{\frac{\ell'}{2}} \Rightarrow r = \frac{\ell'}{2}\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

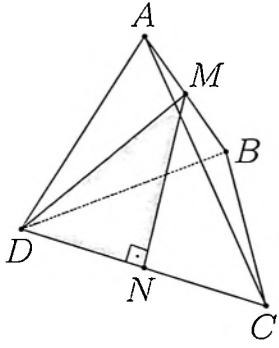
e o volume $V$ do cilindro é igual a

$$V = \pi r^2 h = \pi\frac{3}{9}\frac{\sqrt{6}}{3} = \pi\frac{\sqrt{6}}{9}\ \text{cm}^3.$$

**Questão 19 (E):**

- A reta $BC$ é caracterizada por $BC : 4x - 3y = 5$ e o ponto médio desse segmento é $D = \frac{B+C}{2} = (\frac{7}{2}, 3)$. A reta $AD$ é perpendicular a $BC$ e passa por $D$, de modo que $AD : 6x + 8y = 45$, e a afirmação I é falsa;
- A distância $AB$ é igual a $BC = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = 5$, de modo que $A$ pertence à reta $AD : 6x + 8y = 45$ (ver item anterior) e à circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = AB^2 = 25$, e a afirmação II é verdadeira;
- Como $AC = BC = 5$, então $A$ pertence à circunferência $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. Além disso, $AD = BC\frac{\sqrt{3}}{2}$, de modo que $A$ também pertence à circunferência $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{75}{4}$, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 20 (B):**




Se $\ell = 1$ é a aresta do tetraedro, então

$$\begin{cases} DM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ DN = \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow MN = \sqrt{DM^2 - DN^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

e a área desejada é igual a

$$S = \frac{DN \times MN}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ \text{cm}^2.$$

**Problema 01:**

a) Como $C \subset B$, então $B \cap C = C$ e assim $n(B \cap C) = n(C)$, de forma que $n(B) = n(B \setminus C) + n(C) = 4n(C)$. Como $(n(C), n(A), n(B))$ formam uma progressão geométrica de razão $r$, então $n(B) = r^2 n(C) = 4n(C)$, de modo que $r = 2$, pois $r > 0$, e assim $n(A) = 2n(C)$. Logo,

$$\begin{aligned} & n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ \Rightarrow\ & 22 = 2n(C) + 4n(C) - \frac{1}{2}n(C) = \frac{11}{2}n(C) \\ \Rightarrow\ & n(C) = 4. \end{aligned}$$

b) Do enunciado, $n(B \setminus C) = 3n(C) = 12$, de modo que $n(\mathcal{P}(B \setminus C)) = 2^{12} = 4096$.

**Problema 02:** Usando a expressão para soma de progressões geométricas infinitas, têm-se

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1 - r^5} = 8 \\ \dfrac{a_1 r^4}{1 - r^5} = 2 \end{cases} \Rightarrow r^4 = \frac{2}{8} \Rightarrow r = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1 = 8 + \sqrt{2}.$$

pois $r < 0$. Logo, a soma desejada é igual a

$$S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{8 + \sqrt{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 14 - 6\sqrt{2}.$$

**Problema 03:** Calculando as derivadas,

$$\begin{cases} (a^x)' = a^x \ln a \\ (a^{-x})' = -a^{-x} \ln a \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{[3^x - (-3^{-x})] \ln 3}{2} = (3^x + 3^{-x}) \frac{\ln 3}{2},$$

que é sempre positiva para todo $x$ real, de modo que $f(x)$ é sempre crescente. Além disso, como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty,$$

então o conjunto imagem de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{R}$, e $f(x)$ é bijetora.

Trocando as variáveis, tem-se

$$x = \frac{3^{f^{-1}(x)} - 3^{-f^{-1}(x)}}{2}.$$

Definindo $z = 3^{f^{-1}(x)}$, podemos escrever

$$x = \frac{z - z^{-1}}{2} = \frac{z^2 - 1}{2z} \Rightarrow z^2 - 2xz - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}.$$

Descartando a solução negativa de $z$, pois $z = 3^{f^{-1}(x)} > 0$, tem-se

$$f^{-1}(x) = \log_3 z = \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

**Problema 04:** Como $f(x)$ é ímpar, então $f(-x) = -f(x)$. A função inversa $f^{-1}(\cdot)$ é tal que $f^{-1}(f(x)) = x$. Usando $-x$ nessa última relação, tem-se

$$f^{-1}(f(-x)) = -x \Rightarrow f^{-1}(-f(x)) = -f^{-1}(f(x)),$$

de modo que $f^{-1}(\cdot)$ é ímpar.

**Problema 05:** Como $a_0 \neq 0$, então o polinômio não tem raiz nula. Assim:

- Se $r_1$ e $r_2$, $|r_1| \neq |r_2|$, então $-r_1$ e $-r_2$ também são raízes. Assim, se $r_3$ é raiz não real, então $-r_3$ e $\overline{r_3}$, que também são raízes, devem ser iguais, ou seja, $r_3 = -\overline{r_3}$. Logo, $r_3$ deve ser imaginária e a afirmação I é verdadeira;
- Se $r = a + bi$ é raiz dupla, com $ab \neq 0$, então $\overline{r} = a - bi$ deve ser raiz dupla (pois os coeficientes são reais) e $-r = -a - bi$ e $-\overline{r} = -a + bi$ devem ser raízes. Como, $\overline{(-r)} = -\overline{r}$ todas as condições são satisfeitas, mesmo com $ab \neq 0$, e a afirmação II é falsa;
- Se as raízes são $1, -1, 2, -1, 3, -3$, então $a_6 = 6 > 0$, e a afirmação III é falsa.

**Problema 06:**

a) Das 90 bolas, há 18 múltiplos de 5, 15 múltiplos de 6 e 3 múltiplos simultaneamente de 5 e 6. Logo, há $(18 + 15 - 3) = 30$ múltiplos de 5 ou de 6, de modo que a probabilidade desejada é igual a $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

b) Sem saber o resultado da primeira bola, ela não afeta em nada o resultado da segunda bola. Assim, a probabilidade da segunda bola não ser múltipla de 6 é a mesma probabilidade de qualquer bola não ser múltipla de 6, isto é, $\frac{90-15}{90} = \frac{5}{6}$.

**Problema 07:**

a) Aplicando Laplace na terceira linha de $A$,

$$\det A = -2\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ -a & b & 1 \end{vmatrix} = -2(a^2 + b^2 + a^2 - b^2) = -4a^2.$$

Assim, para que o sistema tenha solução única, devemos ter $a \neq 0$.

b) Fazendo $AX = B$, tem-se $2y = b_3 \Rightarrow y = 1$ e o sistema se reduz a

$$\begin{cases} ax + bz + w = 0 \\ bx + az = 0 \\ -ax + bz + w = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{a}, z = \frac{b}{a^2}, w = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Em particular, quando $a^2 = b^2$, a solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}^t.$$

**Problema 08:**

a) Desenvolvendo a equação do enunciado, têm-se

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right) = \frac{3 - 2\cos^2 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 6\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow 3 - 2\cos^2 x = 6 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 3 \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow 3 - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

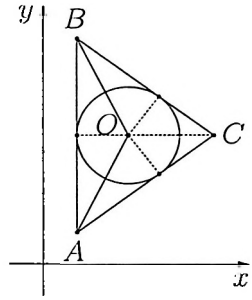
$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6}.$$

b) Para os valores acima, têm-se

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x = 1 \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{cotg} x = \sqrt{3} \\ \operatorname{cotg} x = 0 \\ \operatorname{cotg} x = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

**Problema 09:**



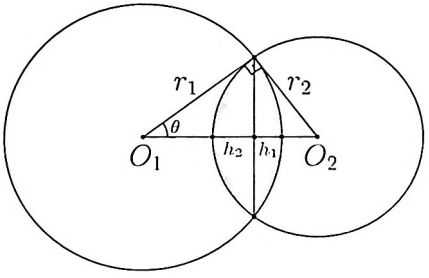

Sejam $O$ e $r$ o centro e o raio, respectivamente, da circunferência inscrita no triângulo $\Delta ABC$. Pela simetria do problema, devemos ter $O = (1 + r, 4)$. Além disso, $AC = BC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5$, de modo que

$$S_{ABC} = \frac{AB \times 4}{2} = \frac{(AB + BC + AC)r}{2} \Rightarrow \frac{6 \times 4}{2} = \frac{(6+5+5)r}{2} \Rightarrow r = \frac{3}{2}.$$

Assim, $O = (\frac{5}{2}, 4)$ e a circunferência inscrita pode ser descrita pela equação

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \frac{9}{4}.$$

**Problema 10:**




a) Planificando o problema conforme a figura acima, tem-se

$$O_1O_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \text{ cm}.$$

b) A superfície de interesse é formada por duas calotas de raios $r_1$ e $r_2$ e alturas $h_1$ e $h_2$, respectivamente, conforme ilustrado acima, onde

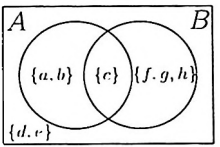
$$\text{tg}\,\theta = \frac{r_2}{r_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{3}{5} \text{ e } \cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = r_1 - r_1\cos\theta = \frac{2}{5} \\ h_2 = r_2 - r_2\,\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

de modo que a área desejada é igual a

$$S = 2\pi r_1 h_1 + 2\pi r_2 h_2 = 2\pi\left(2\times\frac{2}{5} + \frac{3}{2}\times\frac{3}{5}\right) = \frac{17\pi}{5} \text{ cm}^2.$$

# II.5 Vestibular 2009

**Questão 01 (C):**




Pelos dados do problema,

$$\begin{cases} A \setminus B = \{a.b\} \\ B \setminus A = \{f.g.h\} \\ U \setminus (A \cup B) = \{d.e\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{c\} \Rightarrow n(\mathcal{P}(A \cap B)) = 2^{n(A \cap B)} = 2.$$

**Questão 02 (B):** Seja $g$ o número inicial de carros movidos a gasolina. Após a conversão, $0.64g$ são movidos a gasolina, $0.36g$ são movidos a gasolina ou GNV, $0.64(1000 - g)$ são flex e $0.36(1000 - g)$ são flex ou movidos a GNV, de modo que

$$0{,}36g + 0{,}64(1000 - g) = 556 \Rightarrow 0{,}28g = 640 - 556 = 84 \Rightarrow g = 300.$$

Assim, após a conversão, há $0.36(1000 - 300) = 252$ carros tricombustíveis.

**Questão 03 (E):**

- Usando $y = -x$, então $f(x - x) = f(x)f(-x)$, e assim $f(-x) = \frac{f(0)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)}$ (ver próximo item), de modo que em geral $f(-x) \neq -f(x)$, e a afirmação I é falsa;
- Usando $y = 0$, então $f(x) = f(x)f(0)$, de modo que $f(0) = 1$ (já que, pelo enunciado, $f(x) \neq 0$), e a afirmação II é verdadeira;
- Usando $y \neq 0$, então $f(x + y) = f(x)f(y) \neq f(x)$, pois $f(y) \neq 1$, de modo que $f$ é injetiva, e a afirmação III é verdadeira;
- Usando $y = x$, então $f(2x) = f^2(x) > 0$ (pois, do enunciado, $f(x) \neq 0$) de modo que $f$ não é sobrejetiva, e a afirmação IV é verdadeira.

**Questão 04 (B):** Usando coordenadas polares, o número complexo $z$ do enunciado pode ser escrito como

$$z = \left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^{54} = e^{i\frac{54\pi}{5}} = e^{i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)},$$

e assim

$$z = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5} = -a + ib.$$

**Questão 05 (E):** Como o polinômio é uma função par, seus coeficientes de ordem ímpar devem ser nulos, ou seja

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{a}{2} \text{ e } c = -\frac{3a}{2},$$

de modo que o polinômio pode ser reescrito como

$$a\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - 1\right).$$

cujas raízes são tais que

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}} = \pm\sqrt{2} \text{ e } \pm i.$$

Logo, a soma $S$ dos módulos das raízes é igual a

$$S = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 + 1 = 2(\sqrt{2} + 1).$$

**Questão 06 (C):** Reescrevendo $f(x)$ da forma

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 1 + 2x(x^2 - 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2x(x^2 - 1) \\ &= (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 1) \\ &= (x + 1)^2(x + 1)(x - 1) \\ &= (x + 1)^3(x - 1). \end{aligned}$$

então

$$f \circ g = [(x - 1)^2 + 1]^3[(x - 1)^2 - 1].$$

cujas raízes são $1 \pm i$ (cada uma com multiplicidade 3), $0$ e $2$ (com multiplicidade 1).

**Questão 07 (A):** Um polinômio com coeficientes simétricos possui raízes recíprocas, isto é, se $r$ é raiz do polinômio, então $\frac{1}{r}$ também o é. Assim, para coeficientes reais, se $r$ não real é raiz, então $\overline{r}$, $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{\overline{r}}$ também são raízes.

Como $r$ é não real e $|r| \neq 1$, então $r$, $\overline{r}$, $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{\overline{r}}$ são necessariamente não reais e distintas, e a afirmação I é verdadeira e as afirmações II e III são falsas.

**Questão 08 (B):** Sejam $r_1$, $r_2$ e $r_3$ as soluções da equação perfazendo, nessa ordem, uma progressão geométrica, de modo que $r_1 r_3 = r_2^2$. Além disso, por Girard, tem-se $r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a}$, e assim $r_2 = \sqrt[3]{-27} = -3$. Com isso, as relações de Girard tornam-se

$$\begin{cases} r_1 - 3 + r_3 = \frac{a}{2} \\ -3r_1 - 3r_3 + r_1 r_3 = \frac{b}{2} \\ -3r_1 r_3 = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_3 = \frac{a}{2} + 3 \\ r_1 + r_3 = \frac{9 - \frac{b}{2}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} + 3 = \frac{9 - \frac{b}{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}.$$

**Questão 09 (E):** A melhor aproximação quadrática é dada por

$$\begin{aligned} X_0 &= (A^t A)^{-1} A^t b \\ &= \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Questão 10 (D):** Multiplicando a primeira equação por $c_1$ e a segunda por $c_2$ e adicionando as equações resultantes, tem-se

$$(a_1 c_1 + a_2 c_2)x + (b_1 c_1 + b_2 c_2)y = c_1^2 + c_2^2 \Rightarrow 0 = c_1^2 + c_2^2.$$

o que é inconsistente com o fato de $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, de modo que o sistema é impossível.

**Questão 11 (A):** A equação $AX = X$ corresponde a $(A - I)X = 0$, que admite solução não nula se $\det(A - I) = 0$.

Como $\mathrm{tr}\, A = (a_{11} + a_{22}) = 5a_{11}$, então $a_{22} = 4a_{11}$. E como $a_{22} = a_{11}q^2$, então $q = \pm 2$. Com isto, devemos ter

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & \pm 2a_{11} \\ \pm 2a_{11} & 4a_{11} - 1 \end{vmatrix} = (a_{11} - 1)(4a_{11} - 1) - 4a_{11}^2 = 0 \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{5},$$

de modo que

$$a_{11}^2 + q^2 = \frac{1}{25} + 4 = \frac{101}{25}.$$

**Questão 12 (B):** Pela definição de probabilidade condicional, a probabilidade $P(p|p)$ do estrangeiro ser efetivamente proficiente ao ser avaliado como proficiente é a probabilidade dele ser proficiente e ser avaliado como proficiente ($0{,}18 \times 0{,}75$) dividida pela probabilidade dele ser avaliado como proficiente, isto é,

$$P(p|p) = \frac{0{,}18 \times 0{,}75}{0{,}18 \times 0{,}75 + 0{,}82 \times 0{,}07} = 0{,}7017.$$

**Questão 13 (E):** Para que a equação do enunciado tenha raiz dupla, seu discriminante deve ser nulo, ou seja

$$4b^2 \cos^2 \alpha - 4(b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow a^2 = b^2(1 - \cos^2 \alpha) = b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow a = b \operatorname{sen} \alpha.$$

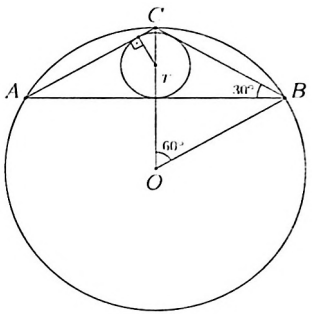
de modo que, pela lei dos senos, $\operatorname{sen} \beta = 1$ e assim $\beta = 90°$. Logo, o triângulo é retângulo com hipotenusa $b$.

**Questão 14 (D):** As distâncias do ponto $(x, y)$ à reta $r$ e ao ponto $A$ são $(x - 1)$ e $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$, respectivamente. Assim, devemos ter

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 &\Rightarrow 2x^2 - 8x + 10 + (y-2)^2 = 4 \\ &\Rightarrow 2(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ &\Rightarrow (x-2)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1.\end{aligned}$$

que corresponde a uma elipse de centro $(2, 2)$ e semi-eixos $1$ e $\sqrt{2}$.

**Questão 15 (D):**




Sejam $O$ o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $\Delta ABC$ e $r$ o raio da circunferência inscrita nesse mesmo triângulo. Como $R = OB = OC = BC$, então o triângulo $\Delta OBC$ é equilátero, de forma que $B\hat{O}C = 60°$. Assim, $C\hat{A}B = \frac{B\hat{O}C}{2} = 30°$, e o triângulo $\Delta ABC$ é isósceles com $AC = BC$ e $A\hat{C}B = 120°$. Logo, a altura $h$ do vértice $C$ em relação ao lado $AB$ é tal que

$$h = AC\cos 60° = r + \frac{r}{\cos 30°} \Rightarrow 2\times\frac{1}{2} = r\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow r = (2\sqrt{3} - 3)\text{ cm}.$$

**Questão 16 (E):** O vértice $V$ da parábola $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4}$ é tal que $\frac{dy}{dx} = x - 1 = 0$, e assim $V = (1, \frac{1}{4})$, que é simétrico em relação ao foco $F = (1, \frac{1}{4} + f)$ e à diretriz $d : y = \frac{1}{4} - f$ da parábola. Assim, um ponto $P = (x, y)$ da parábola deve satisfazer

$$PF^2 = (x-1)^2 + \left[y - \left(\frac{1}{4} + f\right)\right]^2 = \left[y - \left(\frac{1}{4} - f\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - 4yf + f = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 8yf + 2 + 2f = 0.$$

Igualando essa expressão à equação da parábola, tem-se

$$\begin{cases} 8f = 4 \\ 2 + 2f = 3 \end{cases} \Rightarrow f = \frac{1}{2}.$$

de modo que a distância entre o vértice $V = (1, \frac{1}{4})$ e o foco $F = (1, \frac{3}{4})$ da parábola é igual a $VF = \frac{1}{2}$.

**Questão 17 (A):** Desenvolvendo, inicialmente,

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} - \frac{\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}x.$$

e ainda

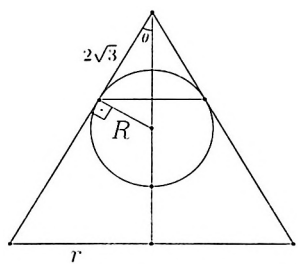
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(x+\frac{11}{2}\pi\right) &= \operatorname{sen}x\cos\frac{11}{2}\pi + \cos\frac{11}{2}\pi\operatorname{sen}x\\ &= \operatorname{sen}x\cos\frac{3}{2}\pi + \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\cos x\\ &= -\cos x,\end{aligned}$$

de modo que a expressão do enunciado é equivalente a

$$(-\cos x + \operatorname{cotg}^2 x)\operatorname{sen}x = \frac{\cos x(-\operatorname{sen}^2 x + \cos x)}{\operatorname{sen}x} = \operatorname{cotg}x(-\operatorname{sen}^2 x + \cos x).$$

**Questão 18 (B):** Sejam $O = (0,0)$ e $P = (1,3)$. A reta suporte de $AB$ é ortogonal a $OP : y = 3x$ e passa por $P$. Assim, $AB : y = -\frac{1}{3}x + b$, com $b$ tal que $3 = -\frac{1}{3} + b$, ou seja $b = \frac{10}{3}$. Logo, uma equação para a reta $AB$ seria $AB : 3y = -x + 10$.

**Questão 19 (A):**




Planificando o problema conforme a figura acima, onde $\theta = 30°$, o raio $R$ da esfera é tal que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{R}{2\sqrt{3}} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{3} = 2.$$

e o volume $V_e$ da esfera é igual a

$$V_e = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{32\pi}{3}.$$

Já para o cone de altura $h = 8$, o raio $r$ de sua base é tal que

$$\text{tg}\,\theta = \frac{r}{h} \Rightarrow r = 8\frac{\sqrt{3}}{3},$$

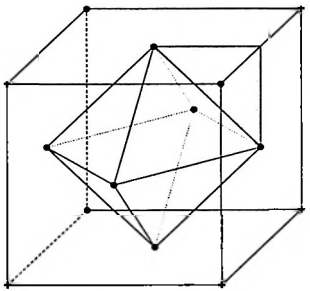
e o volume $V_c$ do cone é igual a

$$V_c = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{512\pi}{9},$$

de modo que o volume desejado é dado por

$$V = V_c - V_c = \frac{416\pi}{9}\ \text{cm}^3.$$

**Questão 20 (C):**



Sejam $L$ e $\ell$ as arestas do cubo e do octaedro, respectivamente, onde $L = \sqrt{(4-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$. Do triângulo em destaque,

$$\ell^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 1.$$

de modo que a área lateral do octaedro é igual a

$$S = 8 \times \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}.$$

**Problema 01:** O domínio da função logaritmo é tal que

$$\begin{cases} x+4>0 \\ x+4\neq 1 \\ x^3-26x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq -3 \\ \begin{cases} x>\sqrt{26} \\ \text{ou} \\ -\sqrt{26}<x<0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4<x<-3 \\ \text{ou} \\ -3<x<0 \\ \text{ou} \\ \sqrt{26}<x \end{cases}.$$

Satisfeitas as condições acima, devemos ainda ter $x \leq 9$, de modo que

$$S = \begin{cases} -4<x<-3 \\ \text{ou} \\ -3<x<0 \\ \text{ou} \\ \sqrt{26}<x\leq 9 \end{cases} \Rightarrow S^C = (-\infty,-4]\cup\{-3\}\cup[0,\sqrt{26}]\cup(9,+\infty),$$

onde o complemento $S^C$ de $S$ foi considerado em relação ao conjunto $\mathbb{R}$.

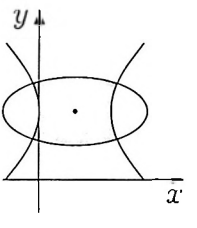
**Problema 02:** Como $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(w) = x^2+4y^2-2x-16y \\ \mathrm{Im}(w) = 3x^2-y^2-6x+4y \end{cases}.$$

de modo que

$$\begin{cases} x^2+4y^2-2x-16y\leq -13 \\ 3x^2-y^2-6x+4y\leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2\leq 1 \\ (x-1)^2-\dfrac{(y-2)^2}{3}\leq 1 \end{cases}.$$

Dessa forma, o o conjunto $\Omega$ consiste na interseção de uma elipse (com centro $(1,2)$ e semi-eixos de comprimentos 2 e 1 nas direções dos eixos $x$ e $y$, respectivamente) com uma hipérbole (de mesmo centro $(1,2)$ e semi-eixos de comprimentos 1 e $\sqrt{3}$ também nas direções dos eixos $x$ e $y$, respectivamente), como esboçado abaixo.



**Problema 03:**

a) Pela definição de $f(x)$,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2 + 3}{x_2 + 1} - \frac{2x_1 + 3}{x_1 + 1} = \frac{x_1 - x_2}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)}.$$

Logo, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$, de modo que $f(x)$ é injetora.

b) Reescrevendo $f(x)$ da forma

$$f(x) = \frac{2x + 2 + 1}{x + 1} = 2 + \frac{1}{x + 1}.$$

é simples perceber que a imagem de $f(x)$ é o conjunto $D = \mathbb{R} - \{2\}$. Obtendo a inversa de $f(x)$, para $x \neq 2$, tem-se

$$x = 2 + \frac{1}{f^{-1}(x) + 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \frac{1}{x - 2} = \frac{3 - x}{x - 2}.$$

**Problema 04:**

a) Se $\beta = 0$, o produto $P$ das raízes é tal que

$$P = -a_0 = \prod_{n=1}^{11} i\gamma_n = \left(\prod_{n=1}^{11} \gamma_n\right) i^{11} = \left(\prod_{n=1}^{11} \gamma_n\right)(-i).$$

que deve ser real. Logo, necessariamente $a_0 = 0$, e a afirmação I é verdadeira;

b) Se $a_{10} = 0$, então a soma $S$ das raízes é tal que

$$S = -a_{10} = \sum_{n=1}^{11} (\beta + i\gamma_n) = 11\beta + i \sum_{n=1}^{11} \gamma_n = 0.$$

Logo, como $\sum_{n=1}^{11} \gamma_n$ é real, então, necessariamente $\beta = 0$, e a afirmação II é verdadeira;

c) Do primeiro item, se $\beta = 0$, existe uma raiz $r_{n_0} = i\gamma_{n_0}$ nula. Dessa forma, pelas relações de Girard, o coeficiente $a_1$ pode ser escrito como

$$a_1 = C_1^{11} \sum_{n=1}^{11} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{11} i\gamma_m = 11 \prod_{\substack{m \\ m \neq n_0}}^{11} i\gamma_m.$$

que é necessariamente não nulo, já que as raízes são simples e assim $\gamma_m \neq 0$, para $m \neq n_0$, e a afirmação III é falsa.

**Problema 05:** A probabilidade de exatamente $n$ candidatos em 6 conseguirem a nota mínima é

$$P_n = C_n^6(0.2)^n(0.8)^{6-n}.$$

Logo, a probabilidade de pelo menos 4 conseguirem a nota mínima é

$$\begin{aligned} P &= P_4 + P_5 + P_6 \\ &= C_4^6(0.2)^4(0.8)^2 + C_5^6(0.2)^5(0.8) + C_6^6(0.2)^6 \\ &= 15\times 16(0.2)^6 + 6\times 4(0.2)^6 + (0.2)^6 \\ &= 265(0.2)^6 \\ &= \frac{53}{3125}. \end{aligned}$$

**Problema 06:**

a) Considere os vetores $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}$ tais que a matriz formada coluna-a-coluna $X_x = [X_1 X_2 X_3]$ seja inversível. Dessa forma, como $AX_1 = AX_2 = AX_3 = 0_{31}$, onde $0_{mn}$ é a matriz nula pertencente a $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, então $AX_x = 0_{33}$ e assim $A = 0_{33}X_x^{-1} = 0_{33}$;

b) Suponha que $\det A \neq 0$. Assim, podemos inverter $A$ e obter $B = A^{-1}0_{33} = 0_{33}$, o que é impossível para as condições do problema, de modo que, necessariamente $\det A = 0$. Analogamente, supondo $\det B \neq 0$, podemos inverter $B$ obtendo $A = 0_{33}B^{-1} = 0_{33}$, o que novamente viola as condições de problema, de modo que, por redução ao absurdo, tem-se $\det B = 0$.

**Problema 07:** Desenvolvendo a equação do enunciado, têm-se

$$1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

Como $x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$, então $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$, de forma que

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\operatorname{sen} x.$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^2 x + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\operatorname{sen} x\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \frac{4}{3} - 4\operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen}^2 x = 1$$
$$\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - \frac{16}{3}}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}}{2}.$$

Determinando $\cos x$ para estas soluções, têm-se

$$\cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\left(\frac{1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, como $x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$, então $\cos x \geq 0$, de modo que a solução $\operatorname{sen} x = \frac{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}{2}$ é espúria, sobrando apenas

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}{2}.$$

**Problema 08:** A reta $r$ tem coeficiente angular $\operatorname{tg}\theta = 3$, de modo que o coeficiente angular de $t$ deve ser igual a

$$a = \operatorname{tg}(\theta \pm 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}\theta \pm \operatorname{tg}45^\circ}{1 \mp \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}45^\circ} = \frac{3 \pm 1}{1 \mp 3} = -2 \text{ ou } \frac{1}{2}.$$

Calculando a interseção $I = (x_I, y_I)$ da reta $t : y = ax + b$ com a reta ortogonal a ela passando pela origem, têm-se

$$\begin{cases} y_I = ax_I + b \\ y_I = \frac{1}{a}x_I \end{cases} \Rightarrow x_I = -\frac{ab}{a^2+1} \text{ e } y_I = \frac{b}{a^2+1}.$$

Como a distância da reta $t$ à origem é a distância do ponto $I$ à origem, tem-se

$$\sqrt{x_I^2 + y_I^2} = \sqrt{\left(-\frac{ab}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2+1}\right)^2} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Logo, se $a = -2$ então $|b| = 3$ e se $a = \frac{1}{2}$ então $|b| = \frac{3}{2}$.

Para que a reta $t$ seja tangente à circunferência $C$, sua interseção deve ser única. Assim, o discriminante da equação

$$(x-3)^2 + (ax+b-1)^2 = 20 \Rightarrow (1+a^2)x^2 + (2ab-2a-6)x + (b^2-2b-10) = 0$$

deve ser nulo, ou seja,

$$(2ab - 2a - 6)^2 - 4(1 + a^2)(b^2 - 2b - 10) = 0.$$

Testando essa relação para os possíveis valores de $a$ e $b$ obtidos anteriormente, verifica-se que apenas $a = -2$ e $b = -3$ a satisfaz, de modo que a reta $t$ pode ser descrita por $t : y = -2x - 3$.

**Problema 09:** A interseção da reta $r_5 : y = m_5x + 10$, onde $m_5 = 4q$, com a circunferência $x^2 + y^2 = 25$ é caracterizada por

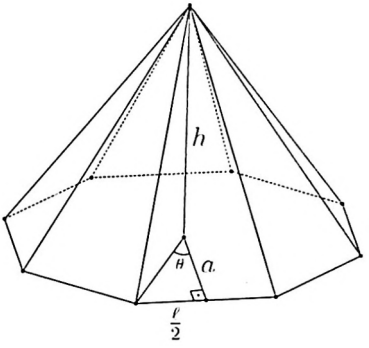
$$x^2 + (4qx + 10)^2 = 25 \Rightarrow (1 + 16q^2)x^2 + 80qx + 75 = 0.$$

Para que a interseção seja única, já que a reta $r_5$ tangencia a circunferência, devemos ter

$$(80q)^2 - 300(1 + 16q^2) = 0 \Rightarrow 1600q^2 = 300 \Rightarrow q = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

pois $q > 0$.

**Problema 10:**




Na figura acima, $\theta = \frac{45^\circ}{2}$, e assim

$$\begin{cases} \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

Com isso,

$$\ell = 2a\operatorname{tg}\theta = 2a\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

Usando a notação da figura acima, a área lateral $S_l$ e a área da base $S_b$ da pirâmide são tais que

$$\begin{cases} S_l = 8\dfrac{\ell\sqrt{h^2+a^2}}{2} = 4\ell\sqrt{h^2+a^2} \\ S_b = 8\dfrac{a\ell}{2} = 4a\ell \end{cases} \Rightarrow \frac{4\ell\sqrt{h^2+a^2}}{4a\ell} = \sqrt{5} \Rightarrow h = 2a.$$

Dessa forma, o volume $V$ da pirâmide é tal que

$$V = \frac{4a\ell h}{3} = \frac{16a^3\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{3}.$$

## II.6 Vestibular 2008

**Questão 01 (A):** Pela definição de probabilidade condicional,

$$P(\text{mulher}|\text{daltônica}) = \frac{P(\text{mulher e daltônica})}{P(\text{daltônica})},$$

de modo que

$$P(\text{mulher}|\text{daltônica}) = \frac{0.5 \times 0.0025}{0.5 \times 0.05 + 0.5 \times 0.0025} = \frac{0.0025}{0.0525} = \frac{1}{21}.$$

**Questão 02 (B):** Usando a notação polar $\alpha = e^{i\theta_1}$ e $\beta = e^{i\theta_2}$, têm-se

$$\begin{aligned}
|\alpha - \beta| &= \left|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}\right| \\
&= \left|e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}\right]\right| \\
&= \left|e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\right| \left|2i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right| \\
&= \left|2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right| \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

de modo que

$$\left|\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\theta_1-\theta_2}{2} = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \beta^2 &= e^{2i\theta_1} + e^{2i\theta_2} \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)}\left[e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{i(\theta_2-\theta_1)}\right] \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2}} + e^{\mp i\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= e^{i(\theta_1+\theta_2)}(\pm i \mp i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

**Questão 03 (A):** Fazendo $\det A = 0$, tem-se

$$\det A = k(k-3) + 12 + 18 + 3k - 18 + 4(k-3) - k^2 - 4k - 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \text{ou} \\ k = -4 \end{cases}.$$

Considerando $k = 0$, o sistema se reduz a

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6z = 6 \\ -x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + 3z = 3 \end{cases}.$$

que corresponde a um sistema possível mas indeterminado.

Considerando $k = -4$, o sistema torna-se

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + 6z = 6 \\ -x + 3y - 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 4z = 1 \\ 2y - 8z = 0 \end{cases}.$$

que corresponde a um sistema impossível.

Logo, $T = -4$ e $S = 0$, de modo que $T - S = -4$.

**Questão 04 (D):** Pela definição de $B$, tem-se

$$B^t A = 3(A^{-1} + C^{-1})A = 3(I + C^{-1}A).$$

Logo,

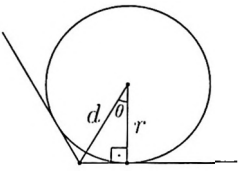
$$\begin{cases} \det B^t A = \det B \times \det A = 5 \det B \\ \det B^t A = \det 3(I + C^{-1}A) = 3^n \det (I - C^{-1}A) = \frac{3^n}{3} \end{cases} \Rightarrow \det B = \frac{3^n - 1}{5}.$$

**Questão 05 (B):** O grau $g_P$ de $P$ é tal que

$$g_P = 2 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 = 62.$$

com $q$ inteiro positivo. Logo, por inspeção, $q = 2$, e o grau do polinômio de maior grau que compõe $P$ é igual a $2q^4 = 32$.

**Questão 06 (E):**



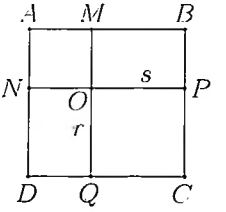

Determinando o raio $r$ da esfera, tem-se

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 4\sqrt{3}\pi \Rightarrow r = \sqrt{3}.$$

de modo que a distância desejada é dada por

$$d = \frac{r}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 2 \text{ cm}.$$

**Questão 07 (D):**




Seja $AM = x < 10$. Logo,

$$\begin{cases} S_{AMON} = x^2 \\ S_{OPCQ} = (10-x)^2 \\ S_{ABCD} = 100 \end{cases} \Rightarrow [(10-x)^2]^2 = 100x^2$$

$$\Rightarrow (10-x)^2 = 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 30x + 100 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{900-400}}{2}.$$

de modo que $x = (15 - 5\sqrt{5})$, já que $0 < x < 10$.

**Questão 08 (A):** Escrevendo

$$a_1 = a_4 - 3r, \quad a_2 = a_4 - 2r, \quad a_3 = a_4 - r, \quad a_5 = a_4 + r,$$

têm-se

$$\begin{aligned} p(-1) &= a_5(-1)^5 + a_4(-1)^4 + a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1 \\ &= -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 \\ &= -(\frac{1}{2} + r) + \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - r) + (\frac{1}{2} - 2r) - (\frac{1}{2} - 3r) \\ &= r - \frac{1}{2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{2} &\Rightarrow a_5 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = -1 \\ &\Rightarrow p(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \\ &\Rightarrow p(-2) = (-2)^5 + \frac{(-2)^4}{2} - \frac{(-2)^2}{2} - 1 = -32 + 8 - 2 - 1 = -25. \end{aligned}$$

**Questão 09:** (C) Seja $p(x)$ o polinômio da equação do enunciado. Sejam ainda $r_1$ e $r_2$ as raízes inteiras e distintas de $p(x)$. Como os coeficientes de $p(x)$ são reais, se $(1 - i)/2$ é raiz, então $(1 + i)/2$ também o é. Assim, por Girard, tem-se

$$r_1 r_2 \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow r_1 r_2 = -1.$$

Como $r_1$ e $r_2$ são inteiras, então devemos ter $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$, ou vice-versa, de modo que

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(x-1)(x+1)\left[x - \left(\frac{1-i}{2}\right)\right]\left[x - \left(\frac{1-i}{2}\right)\right] \\ &= 2(x^2-1)(x^2 - x + \frac{1}{2}) \\ &= 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1, \end{aligned}$$

e assim $a = -2$, $b = -1$ e $c = 2$.

**Questão 10 (E):** Uma equação polinomial recíproca de primeira espécie possui coeficientes simétricos iguais, ou seja

$$\begin{cases} a + c + 2 = a + b + 4 \\ b + 3c + 1 = c - a \end{cases}$$

Além disso, como $x = 1$ é raiz, devemos ter

$$a + c + 2 + b + 3c + 1 + c - a + a + b + 4 = 0,$$

de modo que é possível compor o sistema

$$\begin{cases} b - c = -2 \\ a + b + 2c = -1 \\ a + 2b + 5c = -7 \end{cases} \Rightarrow a = 4,\ b = -3,\ c = -1 \Rightarrow abc = 12.$$

**Questão 11 (B):** Denotando a expressão do enunciado por $E$ e usando a expressão para o cosseno da soma, tem-se

$$\begin{aligned} E &= \cos\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{4}{5}\right) - \operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}\right)\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{4}{5}\right) \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\times\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5}\times\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\times\frac{3}{5} \\ &= \frac{7}{25}. \end{aligned}$$

**Questão 12 (E):** Seja $t : y = ax + b$ a reta tangente a $\lambda$ no ponto $P$. Como $t$ passa por $P$, tem-se $b = (\sqrt{3} - 2a)$. Forçando a interseção de $t$ com $\lambda$ a ser única, o discriminante da equação

$$x^2 - (ax + b)^2 = 1 \Rightarrow (1 - a^2)x^2 - 2abx - (b^2 + 1) = 0$$

deve ser nulo, ou seja,

$$\begin{aligned} 4a^2b^2 + 4(1 - a^2)(b^2 + 1) = 0 &\Rightarrow a^2 - b^2 = 1 \\ &\Rightarrow a^2 - (\sqrt{3} - 2a)^2 = 1 \\ &\Rightarrow 3a^2 - 4a\sqrt{3} + 4 = 0 \\ &\Rightarrow (a\sqrt{3} - 2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Logo, a reta $p$ perpendicular a $\lambda$ em $P$ tem coeficiente angular $-\frac{1}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $p$ passa por $P$, uma possível equação para ela é $p : y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$.

**Questão 13 (C):** Desenvolvendo $f(x)$ da forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} 6x - \cos 6x \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} 6x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 6x\right) \\ &= \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(6x - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

de modo que o seu conjunto imagem é $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e seu período é $\frac{2\pi}{6}$.

**Questão 14 (D):** Seja $y = 5^x$. Considerando os dois argumentos das funções-módulo com mesmo sinal, a equação do enunciado torna-se

$$\begin{aligned} y^3 - 5y^2 + 4y = y - 1 &\Rightarrow y^3 - 5y^2 + 3y + 1 = 0 \\ &\Rightarrow (y-1)(y^2 - 4y - 1) = 0 \\ &\Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = 2 + \sqrt{5} \\ 5^x = 2 - \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_5(2 + \sqrt{5}) \\ \text{não existe } x \text{ satisfazendo a condição, pois } y < 0 \end{cases}$$

Considerando os dois argumentos das funções-módulo com sinais opostos, a equação do enunciado torna-se

$$\begin{aligned} y^3 - 5y^2 + 4y = -y + 1 &\Rightarrow y^3 - 5y^2 + 5y - 1 = 0 \\ &\Rightarrow (y-1)(y^2 - 4y + 1) = 0 \\ &\Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = 2 + \sqrt{3} \\ 5^x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_5(2 + \sqrt{3}) \\ x = \log_5(2 - \sqrt{3}) \end{cases}.$$

**Questão 15 (C):** A função $g(x) = (x^2 - x + 1)$ pode ser escrita como

$$g(x) = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right],$$

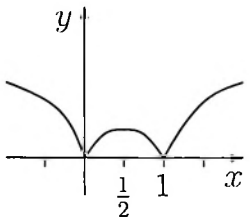
de modo que $g(x)$ representa uma parábola com vértice em $x = \frac{1}{2}$ e é sempre positiva.

Analisando o sinal da função $h(x) = \ln g(x)$, têm-se

$$h(x) > 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \Rightarrow x < 0 \text{ ou } x > 1.$$

Analogamente, para $h(x) = 0$, têm-se $x = 0$ ou $x = 1$, e para $h(x) < 0$, tem-se $0 < x < 1$.

Com isto, é possível esboçar o gráfico de $f(x)$, como indicado abaixo, do qual podemos observar apenas o intervalo $x \in [0, \frac{1}{2}]$, dentre as opções disponíveis, em que $f(x)$ é injetora.




**Questão 16 (E):** Usando a expressão do cosseno da soma, têm-se

$$\begin{aligned}
\cos 6x &= 2\cos^2 3x - 1.\\
\cos 9x &= \cos(6x + 3x)\\
&= \cos 6x \cos 3x - \operatorname{sen} 6x \operatorname{sen} 3x\\
&= (2\cos^2 3x - 1)\cos 3x - 2\operatorname{sen} 3x \cos 3x \operatorname{sen} 3x\\
&= 2\cos^3 3x - \cos 3x - 2\cos 3x(1 - \cos^2 3x)\\
&= 4\cos^3 3x - 3\cos 3x,
\end{aligned}$$

de modo que a equação do enunciado é equivalente a

$$\begin{aligned}
&\cos 3x + 2(2\cos^2 3x - 1) + 4\cos^3 3x - 3\cos 3x = 0\\
\Rightarrow\ &4\cos^3 3x + 4\cos^2 3x - 2\cos 3x - 2 = 0\\
\Rightarrow\ &4\cos^2 3x(\cos 3x + 1) - 2(\cos 3x + 1) = 0\\
\Rightarrow\ &2(2\cos^2 3x - 1)(\cos 3x + 1) = 0\\
\Rightarrow\ &\begin{cases} \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \cos 3x = -1 \end{cases}\\
\Rightarrow\ &\begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ 3x = 2k\pi + \pi \end{cases}\\
\Rightarrow\ &\begin{cases} x = (8k + 4 \pm 1)\frac{\pi}{12} \\ \text{ou} \\ x = (8k \pm 1)\frac{\pi}{12} \\ \text{ou} \\ x = (2k + 1)\frac{\pi}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

com $k$ inteiro. Logo, considerando $0 \leq x \leq \pi/2$, têm-se

$$x = \frac{3\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12} \text{ ou } \frac{\pi}{3},$$

cuja soma é igual a $\frac{13\pi}{12}$.

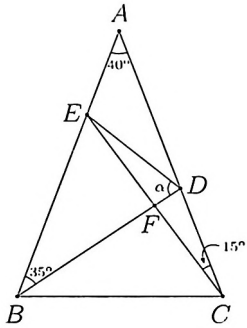
**Questão 17 (A):** O conjunto $H$ é formado por

$$C_2^{365} = \frac{365!}{2!\,363!} = \frac{365 \times 364}{2}$$

conjuntos de 2 elementos cada, dos quais 91 ($\{1, 182\}, \{2, 181\}, \ldots, \{91, 92\}$) têm elementos que somam 183. Com isto, a probabilidade desejada é

$$P = \frac{91 \times 2}{365 \times 364} = \frac{1}{730}.$$

**Questão 18 (D):**




Seja $F$ a interseção de $BD$ com $CE$. Dos dados do problema,

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \Rightarrow D\hat{B}C = 70^\circ - 35^\circ = 35^\circ.$$

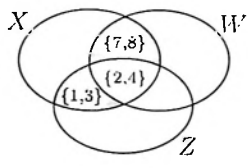
de modo que $BD$ é bissetriz de $E\hat{B}C$. Além disso, têm-se

$$E\hat{C}B = 70^\circ - 15^\circ = 55^\circ \Rightarrow B\hat{F}C = 180^\circ - (D\hat{B}C + E\hat{C}B) = 90^\circ,$$

e assim $BD$ é também altura do vértice $B$ em relação ao lado $EC$ no triângulo $\Delta BEC$, que, por isso mesmo, é isósceles. Logo, $FE = FC$, e os triângulos $\Delta DFC$ e $\Delta DFE$ são equivalentes, de forma que

$$E\hat{D}B = C\hat{D}B = 180^\circ - (D\hat{F}C + D\hat{C}F) = 180^\circ - (90^\circ + 15^\circ) = 75^\circ.$$

**Questão 19 (C):**

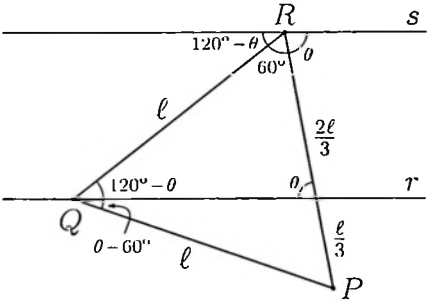



Como $Z \cap Y = \emptyset$, então $(X \setminus Y) \cap Z = X \cap Z$. Com isso, podemos formar o diagrama de Venn acima para os conjuntos $X$, $W$ e $Z$. Do diagrama, o subconjunto $S$ desejado corresponde à região sombreada e é tal que

$$\begin{cases} X \cap (Z \cup W) = \{1,2,3,4,7,8\} \\ W \cap (Y \cup Z) = \{2,4\} \cup V \end{cases} \Rightarrow S = \{1,3,7,8\}.$$

onde $V$ é disjunto com $\{1,2,3,4,7,8\}$.

**Questão 20 (B):**




Aplicando a lei dos senos, tem-se

$$\frac{\ell}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{2\ell}{3}}{\operatorname{sen}(120° - \theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}\theta}{3} = \operatorname{sen}(120° - \theta) = \operatorname{sen}120°\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta.$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{sen}\theta\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{27}{28}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

de modo que

$$\ell\operatorname{sen}\theta = 15 \Rightarrow \ell = \frac{10\sqrt{21}}{3}.$$

Dessa forma, a área $S$ e o perímetro $2p$ do triângulo equilátero $\Delta PQR$ são respectivamente iguais a

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{175\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^2,$$

$$2p = 3\ell = 10\sqrt{21}\ \text{cm}.$$

**Problema 01:** O conjunto $A$ é tal que

$$x(x^3 - 3x - 2) > 0 \Rightarrow x(x-2)(x+1)^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \text{ou} \\ -1 < x < 0 \\ \text{ou} \\ 2 < x \end{cases}.$$

Além disso, devemos ter

$$x(3x+2) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ e } x \geq -\frac{2}{3} \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ e } x \leq -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{ou} \\ x \leq -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Logo, a interseção dos dois conjuntos é igual a

$$A = (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{2}{3}] \cup (2, +\infty).$$

**Problema 02:** As raízes de $z^6 = -64$ são

$$z = \{2e^{\pm i\frac{\pi}{6}}, 2e^{\pm i\frac{\pi}{2}}, 2e^{\pm i\frac{5\pi}{6}}\} = \{\sqrt{3} \pm i, \pm i, -\sqrt{3} \pm i\},$$

que correspondem aos vértices do hexágono regular inscrito no círculo de raio 2, com um vértice em $i$. A relação $1 < |z+2| < 3$ corresponde a um anel centrado em $z = -2$ e de raios interno 1 e externo 3. Verificando as raízes que satisfazem essa relação, constatamos que as soluções desejadas são

$$z = \{-\sqrt{3} \pm i, \pm i\}.$$

**Problema 03:** Se $g$ é ímpar e $h$ é par, então

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = -g(x) + h(x) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \ln \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} \\ h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \ln \sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \end{cases}.$$

**Problema 04:** Para a multiplicidade da raiz nula ser igual a 3, devemos ter

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - \beta - \gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \\ \alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \beta \neq -2\gamma \Rightarrow (\beta, \gamma) \neq (2, -1) \end{cases}.$$

**Problema 05:** Denotando

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Como $A$ é simétrica e ortogonal, então devemos ter $A = A^{-1}$, de modo que $\det A = (ac - b^2) = \pm 1$.

Se $\det A = 1$, então devemos ter

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \begin{cases} a = c \\ ac = 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = c = \pm 1 \end{cases},$$

de modo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se $\det A = -1$, então devemos ter

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & b \\ b & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ ac - b^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -c = \pm\sqrt{1 - b^2}.$$

com $|b| \leq 1$. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \sqrt{1-b^2} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \sqrt{1-b^2} & b \\ b & -\sqrt{1-b^2} \end{bmatrix}.$$

**Problema 06:** Resolvendo em $y = x^2$,

$$y = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 4\operatorname{tg}\alpha}}{2}.$$

Para que as raízes em $x$ sejam reais e distintas, devemos ter

$$\begin{cases} 4\sqrt{3} - 4\operatorname{tg}\alpha > 0 \\ 2\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 4\operatorname{tg}\alpha} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} > \sqrt{4\sqrt{3} - 4\operatorname{tg}\alpha} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3} \\ \operatorname{tg}\alpha > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha < \frac{\pi}{3} \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

**Problema 07:**

a) Da definição de probabilidade condicional,

$$P(C|A\cap B)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)}=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A)\times P(B)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

b) Pela definição de probabilidade conjunta, tem-se

$$P((A\cap B)\cup(A\cap C))=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$
$$\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{3}{10}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{9}{80}.$$

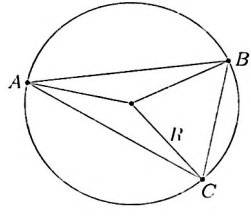
Observando que

$$A\cap C=A\cap C\cap(B\cup B^C)=(A\cap C\cap B)\cup(A\cap C\cap B^C).$$

então, pela definição de probabilidade condicional,

$$P(C|A\cap B^C)=\frac{P(A\cap B^C\cap C)}{P(A\cap B^C)}=\frac{P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(A)\times P(B^C)}=\frac{\frac{9}{80}-\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}.$$

**Problema 08:**




Aplicando a lei dos senos,

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{AB}{\operatorname{sen}\hat{C}}=2R\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{2\sqrt{2}}{2\times\frac{3\sqrt{2}}{4}}=\frac{3}{5}\\ \operatorname{sen}\hat{C}=\frac{2\sqrt{5}}{2\times\frac{3\sqrt{2}}{4}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\hat{A}=\frac{4}{5}\\ \cos\hat{C}=\frac{\sqrt{10}}{10}\end{cases}.$$

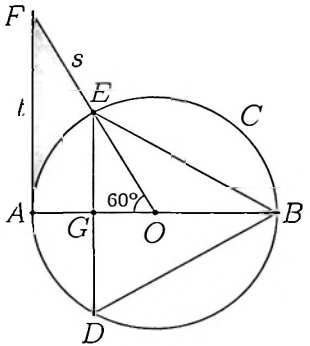
Com isto,

$$\operatorname{sen}\hat{B}=\operatorname{sen}(\hat{A}+\hat{C})=\operatorname{sen}\hat{A}\cos\hat{C}+\operatorname{sen}\hat{C}\cos\hat{A}=\frac{3\sqrt{10}}{50}+\frac{12\sqrt{10}}{50}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

de modo que a área do triângulo $\Delta ABC$ é igual a

$$S_{ABC}=\frac{AB\times BC\times\operatorname{sen}\hat{B}}{2}=\frac{2\sqrt{5}\times2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}}{2}=6.$$

**Problema 09:**




Seja $G$ a interseção de $ED$ com $AB$. O volume desejado é o de um tronco de cone menos o de uma calota esférica. O volume $V_t$ do tronco de cone equivale ao volume de um cone com raio da base $AF = r \operatorname{tg} 60^\circ$ e altura $AO = r$ subtraído do volume de um cone de raio da base $GE = r \operatorname{sen} 60^\circ$ e altura $GO = r \cos 60^\circ$, ou seja

$$V_t = \frac{\pi(r \operatorname{tg} 60^\circ)^2 r}{3} - \frac{\pi(r \operatorname{sen} 60^\circ)^2 r \cos 60^\circ}{3} = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{8} = \frac{7\pi r^3}{8}.$$

A calota esférica tem raio $r$ e altura $h = AG = r(1 - \cos 60^\circ) = \frac{r}{2}$, de modo que seu volume $V_c$ é igual a

$$V_c = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3} = \frac{5\pi r^3}{24},$$

e o volume desejado é dado por

$$V = V_t - V_c = \frac{7\pi r^3}{8} - \frac{5\pi r^3}{24} = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

**Problema 10:** Pelos dados do problema, têm-se

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 5 \\ a - b + c = 2 \\ a + c = 2b \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 2 \text{ e } c = 5.$$

Com isto, a parábola é descrita por

$$y = -x^2 + 2x + 5 = -(x-1)^2 + 6.$$

com vértice em $V = (1, 6)$. Uma reta tangente à parábola tem coeficiente angular

$$\alpha = \frac{dy}{dx} = -2x + 2.$$

que no ponto $(2, 5)$ é tal que $\alpha = -2$. Com isto, a reta $p$ passando pelo vértice e perpendicular a essa tangente $t$ tem coeficiente angular $\frac{1}{2}$ e pode ser descrita por

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}.$$

cuja interseção $I$ com a tangente $t$ é dada por

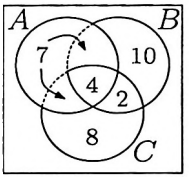
$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{5} \text{ e } y = \frac{31}{5}.$$

Logo, a distância desejada é

$$VI = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(6 - \frac{31}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

# II.7 Vestibular 2007

**Questão 01 (D):**




Com os dados do problema, podemos compor o diagrama de Venn acima e concluir que

$$\begin{cases} n(A) = 11 \\ n(A \cup C) = 21 \\ n(A \cup B \cup C) = 31 \end{cases}$$

de modo que esses números formam uma progressão aritmética de razão 10 e último termo 31.

**Questão 02 (X):** O conjunto $A$ tem 8 elementos não pertencentes a $B$. Com esses 8 elementos, é possível formar $2^8$ subconjuntos, sendo

$$2^8 - C_8^8 - C_7^8 = 2^8 - 1 - 8 = 2^8 - 9$$

com 6 ou menos elementos.

Um desses subconjuntos, porém, é o conjunto vazio que não é disjunto de $B$. Assim, a questão não apresenta opção correta.

**Questão 03 (B):** Desenvolvendo lado direito $D$ da equação do enunciado,

$$D = \left(\frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^4 = \left(\frac{1+2i-1-(1-2i-1)}{1-(-1)}\right)^4 = (2i)^4 = 16.$$

de modo que a equação equivale a

$$\begin{aligned} (1-ix)^3 = (1+ix)^3 &\Rightarrow -3(ix) - (ix)^3 = 3(ix) + (ix)^3 \\ &\Rightarrow ix^3 = 3ix \\ &\Rightarrow x = 0, -\sqrt{3}, \text{ ou } \sqrt{3}. \end{aligned}$$

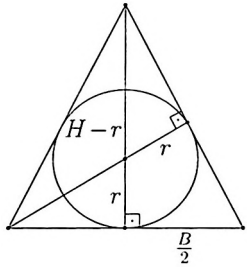
Com isso, a soma dos quadrados das soluções é igual a

$$0^2 + (-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 6.$$

**Questão 04 (E):** Se $Z$ é o número complexo dado, então

$$|Z| = \frac{1}{|1 + i\operatorname{cotg} x|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2}} = |\operatorname{sen} x|.$$

**Questão 05 (D):**




Na figura acima, por semelhança de triângulos, tem-se

$$\frac{H - r}{r} = \frac{\sqrt{H^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2}}{\frac{B}{2}} \Rightarrow r = \frac{BH}{B + \sqrt{4H^2 + B^2}}.$$

Logo, como as áreas do retângulo $S_r$, triângulo $S_t$ e círculo $S_c$ são iguais a

$$S_r = BH, \quad S_t = \frac{BH}{2}, \quad S_c = \pi r^2,$$

devemos ter

$$\pi r^2 \times BH = \left(\frac{BH}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{(BH)^2}{B^2 + 2B\sqrt{4H^2 + B^2} + 4H^2 + B^2} = \frac{BH}{4\pi}$$

$$\Rightarrow 2\pi BH - B^2 - 2H^2 = B\sqrt{4H^2 + B^2}$$

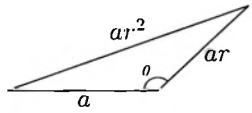
$$\Rightarrow 4\pi^2 B^2 H^2 + B^4 + 4H^4 - 4\pi B^3 H - 8\pi BH^3 + 4B^2H^2 = 4B^2H^2 + B^4$$

$$\Rightarrow 4H(\pi^2 B^2 H + H^3 - \pi B^3 - 2\pi BH^2) = 0.$$

Dividindo essa relação por $4H^4$ e definindo $x = \frac{B}{H}$, tem-se

$$\pi^2 x^2 + 1 - \pi x^3 - 2\pi x = 0.$$

**Questão 06 (C):**




Pela lei dos cossenos, tem-se

$$(ar^2)^2 = a^2 + (ar)^2 - 2a(ar)\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1 + r^2 - r^4}{2r}$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{1 + r^2 - r^4}{2r} < 0.$$

Analisando cada caso separadamente e considerando $r > 0$, têm-se

$$-1 < \frac{1 + r^2 - r^4}{2r} \Rightarrow r^4 - r^2 - 2r - 1 < 0$$

$$\Rightarrow (r^2 - r - 1)(r^2 + r + 1) < 0$$

$$\Rightarrow \left[\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]\left[\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0$$

$$\Rightarrow \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < r < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < r < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e

$$r^4 - r^2 - 1 > 0 \Rightarrow \left(r^2 - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow r^2 < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } r^2 > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow r > \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Juntando as duas restrições, tem-se

$$\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} < r < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**Questão 07 (A):** Para a soma de dois números primos ser ímpar, um desses números primos deve ser 2, e, no caso, o outro será 47. A segunda equação do enunciado determina que $\log_k x = 47$ e, consequentemente, $\log_k y = 2$ e $\log_k z = 3$, de modo que

$$\log_k(xyz) = \log_k x + \log_k y + \log_k z = 52.$$

**Questão 08 (E):** Sejam os números inteiros $a$ e $b$ tais que

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}} = \frac{a}{b} \Rightarrow 4a - ae^y\sqrt{5} = be^x - 2b\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} 4a = be^x \\ ae^y = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln\frac{4a}{b} \\ y = \ln\frac{2b}{a} \end{cases}.$$

de modo que

$$x + y = \ln\frac{4a}{b} + \ln\frac{2b}{a} = \ln 8 = 3\ln 2.$$

**Questão 09 (B):** Escrevendo $Q(z)$ da forma

$$Q(z) = z^5 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e.$$

tem-se $Q(0) = e = 2$. Dividindo $Q(z) = z^5 + az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + 2$ por $p(z) = z^3 + z^2 + z + 1$, têm-se o quociente $q(z)$ e o resto $r(z)$ dados por

$$q(z) = z^2 + (a - 1)z + (b - a)$$
$$r(z) = (c - b)z^2 + (-b + d + 1)z + (2 - b + a).$$

Como o resto $r(z)$ deve ser identicamente nulo e ainda $Q(1) = 8$, então

$$\begin{cases} c = b \\ d = b - 1 \\ a = b - 2 \\ a + b - c + d = 5 \end{cases} \Rightarrow (b-2) + b + b + (b-1) = 5 \Rightarrow \begin{cases} c = b = 2 \\ d = 1 \\ a = 0 \end{cases}.$$

Logo,

$$Q(z) = p(z)q(z) = (z^3 + z^2 + z + 1)(z^2 - z + 2),$$

cujas raízes são

$$z = -1, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7}),$$

e a soma $S$ dos quadrados dos módulos das raízes é igual a

$$S = 1 + 2\times\frac{1}{4}(1+3) + 2\times\frac{1}{4}(1+7) = 7.$$

**Questão 10 (B):** Do enunciado, devemos escrever

$$\begin{aligned} 9x^2 - 63x + c &= (x+a)^3 - (x+b)^3 \\ &= x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 - (x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3). \end{aligned}$$

de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} 3(a-b) = 9 \\ 3(a-b)(a+b) = -21 \\ a^3 - b^3 = c \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-b = 3 \\ a+b = -7 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a = -2 \text{ e } b = -5$$

$$\Rightarrow c = a^3 - b^3 = 117$$

$$\Rightarrow |a| + |b| - c = |-2| + |-5| - 117 = 114.$$

**Questão 11 (D):** Desenvolvendo a equação dada, têm-se

$$||x-1|-3| = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-1|-3 = 2 \\ \text{ou} \\ |x-1|-3 = -2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-1 = 5 \\ \text{ou} \\ x-1 = -5 \\ \text{ou} \\ x-1 = 1 \\ \text{ou} \\ x-1 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow x = 6, \quad 4, 2, 0.$$

de modo que há quatro soluções reais, sendo uma delas negativa, cuja soma é igual a 4,

**Questão 12 (E):** Evitando repetição, mesmo quando o número inicia por 1 ou 2, dado o primeiro algarismo, há 6 possibilidades para o segundo algarismo e 5 possibilidades para o terceiro algarismo, de modo que, nesse caso, há $7 \times 6 \times 5 = 210$ possibilidades. Permitindo a repetição do algarismo 7 quando o número se inicia por 1 ou 2, têm-se ainda mais 2 possibilidades, 177 e 277, e o número total de números aceitáveis é 212.

**Questão 13 (D):** Usando a expressão do arco-dobro, têm-se

$$\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos x\right)\sec x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg} x \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 0 < x \leq \frac{\pi}{6},$$

já que $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

**Questão 14 (C):** Pelas definições dos conjuntos $A$ e $B$, têm-se

$$A = \left\{ \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{24}, \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{6} \right\} = \left\{ \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{24}, \frac{1}{4} \right\}.$$

$$B = \left\{ \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}^2 \frac{11\pi}{24} \right\} = \left\{ \frac{3}{4}, \operatorname{sen}^2 \left( \frac{12\pi}{24} - \frac{\pi}{24} \right) \right\} = \left\{ \frac{3}{4}, \cos^2 \frac{\pi}{24} \right\}.$$

Logo, a soma $S$ dos elementos de $A \cup B$ é dada por

$$S = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{24} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{24} = 2.$$

**Questão 15 (C):** Determinando os elementos das diagonais das duas matrizes, têm-se

$$a_{jj} = \binom{j}{j} = 1.$$

$$b_{jj} = \sum_{p=0}^{j^2} (-2)^p \binom{j^2}{p} = (1-2)^{j^2} = (-1)^j.$$

Logo,

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

$$\operatorname{tr} B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j (-1) = 1 + (-1) + 1 + \ldots + (-1)^n = (-1)^n.$$

de modo que, para $n$ ímpar, tem-se $\operatorname{tr} B = -1$ e assim

$$\operatorname{tr}(A + B) = n - 1.$$

que pode ser escrita, de modo confuso, como

$$\operatorname{tr}(A + B) = \frac{n^2 - 2n + 2}{n - 2}.$$

**Questão 16 (A):** Observando que as retas $2x = y$ e $x = -2y + 10$ são perpendiculares, então o triângulo é retângulo. Seus vértices $A$, $B$ e $C$ são as interseções das retas dadas duas a duas, ou seja,

$$\begin{cases} 2x_a = y_a \\ y_a = 2x_a \end{cases} \Rightarrow A = (x_a, y_a) = (0, 0).$$

$$\begin{cases} 2x_b = y_b \\ x_b = -2y_b + 10 \end{cases} \Rightarrow B = (x_b, y_b) = (2, 4).$$

$$\begin{cases} y_c = 2x_c \\ x_c = -2y_c + 10 \end{cases} \Rightarrow C = (x_c, y_c) = (5, \frac{5}{2}).$$

com

$$\begin{cases} AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} \\ BC = \sqrt{3^2 + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{15}{2}.$$

**Questão 17 (A):** Seja $P = (x_p, y_p)$. A reta $r$ suporte de $AB$ é descrita por $r: y = -x - a$. Logo, a perpendicular $p$ a $r$ e que passa por $P$ tem coeficiente angular 1 e é descrita por $p: y = x + (y_p - x_p)$. Com isto, a interseção $I = (x_i, y_i)$ de $r$ é $p$ é tal que

$$\begin{cases} y_i = -x_i + a \\ y_i = x_i + (y_p - x_p) \end{cases} \Rightarrow x_i = \frac{x_p - y_p + a}{2} \text{ e } y_i = \frac{y_p - x_p + a}{2}.$$

de modo que a distância de $P$ a $r$ é dada por

$$PI = \sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_p + y_p - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_p + x_p - a}{2}\right)^2}.$$

Assim, devemos ter

$$\begin{aligned} PI^2 = PC^2 \Rightarrow \left(\frac{x_p + y_p - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_p - x_p - a}{2}\right)^2 &= (x_p - a)^2 + (y_p - a)^2 \\ \Rightarrow (x_p + y_p - a)^2 + (y_p - x_p - a)^2 &= 2\left[(x_p - a)^2 + (y_p - a)^2\right] \\ \Rightarrow x_p^2 + y_p^2 - 2ax_p - 2ay_p + 3a^2 - 2x_py_p &= 0. \end{aligned}$$

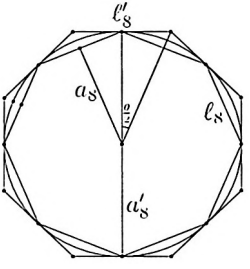
**Questão 18 (B):** Seja $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$ o ângulo central de um polígono de $n$ lados, de modo que devemos ter

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\theta_{n-1}}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n-1} = \frac{b_{n-1}}{2a_{n-1}} > \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\theta_n}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{b_n}{2a_n} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \leq \frac{1}{2} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{n-1}.$$

Testando $n = 6$ e $n = 8$, verifica-se que

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}-1 < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 6 < n \leq 8.$$

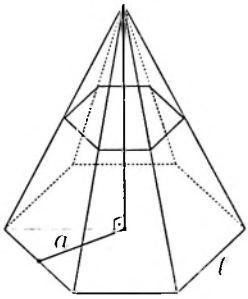
**Questão 19 (E):**




Sejam o lado $\ell_8$ e o apótema $a_8$ de $P_1$ e o lado $\ell'_8$ e o apótema $a'_8$ de $P_2$, como indicado na figura acima, onde $\theta = \frac{360°}{8}$. Dessa forma,

$$\begin{cases} \ell_8 = 2R\operatorname{sen}\frac{45°}{2} \\ a_8 = R\cos\frac{45°}{2} \\ \ell'_8 = 2R\operatorname{tg}\frac{45°}{2} \\ a'_8 = R \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\ell_8 a_8}{\ell'_8 a'_8} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{45°}{2}\cos\frac{45°}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{45°}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

**Questão 20 (C):**




A razão dos volumes das pirâmides seccionada $V_1$ e inicial $V_2$ é igual ao cubo da razão entre as respectivas alturas, ou seja

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Com isso, o volume $V_t$ do tronco é tal que

$$V_t = V_2 - V_1 = \frac{4-\sqrt{2}}{4} V_2 = 1 \Rightarrow V_2 = \frac{4}{4-\sqrt{2}} = \frac{2(4+\sqrt{2})}{7}.$$

A área da base $S_B$ da pirâmide original é igual a

$$S_B = 6\,\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 6\,\frac{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

de modo que a altura $H$ dessa pirâmide é tal que

$$V_2 = \frac{S_B \times H}{3} \Rightarrow H = \frac{3V_2}{S_B} = \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{6}}{21}$$

e a altura $H_t$ do tronco é

$$H_t = H - \frac{1}{\sqrt{2}} H = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} H = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21} \text{ cm}.$$

**Problema 01:** Pelas respectivas definições, têm-se

$$\begin{cases} A \cup B \cup C : x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \Rightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 1 \\ A \cup B : 2^{-x}(2^{-x} + 1)(2^{-x} - 4) > 0 \Rightarrow (2^{-x} - 4) > 0 \Rightarrow x < -2 \\ A \cap C : 0 < x + 4 \leq 1 \Rightarrow -4 < x \leq -3 \\ B \cap C : -\frac{7}{2} \leq x < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} C &= [(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B)] \cup [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= [x = -2 \text{ ou } x \geq 1] \cup [-4 < x < -\frac{5}{2}] \\ &= (-4, -\frac{5}{2}) \cup \{2\} \cup [1, +\infty). \end{aligned}$$

**Problema 02:** Escrevendo $z = a + bi$, com $z \neq 2i$, têm-se

$$\begin{aligned} &(a - bi)(a - bi + 2i) + 2(a + bi)(a + bi - 2i) = 3(a + bi - 2i)(a - bi + 2i) \\ \Rightarrow\ &6(b - 1)(b - 2) + ai(1 - b) = 0 \\ \Rightarrow\ &\begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 1 \\ \text{ou} \\ b = 1 \Rightarrow a \text{ qualquer} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $z$ é da forma $a + i$. Usando esse resultado na outra condição, têm-se

$$0 < |a - i - 2i| \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{a^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow -1 < a^2 \leq 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow A = \{i\}.$$

**Problema 03:** O conjunto $A_k$ é formado por todos os números menores ou iguais a $k$ que são primos com $k$. Logo, os conjuntos da forma $A_{3^m}$ são compostos pelos inteiros positivos, menores ou iguais a $3^m$, que não são múltiplos de 3, de modo que

$$n(A_{3^m}) = \frac{2}{3}3^m = 2 \times 3^{m-1}.$$

De fato,

$$\begin{cases} A_3 = \{1, 2\} \\ A_9 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \\ A_{27} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots, 25, 26\} \\ A_{81} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots, 79, 80\} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} n(A_3) = 2 \\ n(A_9) = 6 \\ n(A_{27}) = 18 \\ n(A_{81}) = 54 \end{cases}$$

Assim, $n(A_3)$, $n(A_9)$, $n(A_{27})$ e $n(A_{81})$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão 3.

**Problema 04:** Elevando a equação do enunciado ao quadrado, têm-se

$$\begin{aligned}
&(x^2-p)+4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)}+4(x^2-1)=x^2\\
&\Rightarrow 4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)}=p+4(1-x^2)\\
&\Rightarrow 16(x^2-p)(x^2-1)=p^2+8p(1-x^2)+16(1-x^2)^2\\
&\Rightarrow 8(2-p)x^2=(p-4)^2.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor correspondente para $x^2$ na equação original, tem-se

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}-p}+2\sqrt{\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}-1}=\sqrt{\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}}\\
&\Rightarrow \sqrt{\frac{(p-4)^2-8p(2-p)}{8(2-p)}}+2\sqrt{\frac{(p-4)^2-8(2-p)}{8(2-p)}}=\frac{p-4}{\sqrt{8(2-p)}}\\
&\Rightarrow \sqrt{9p^2-24p+16}+2\sqrt{p^2}=|p-4|\\
&\Rightarrow |3p-4|+2|p|=|p-4|.
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{cases}
4\le p: 3p-4+2p=p-4\\
\frac{4}{3}\le p\le 4: 3p-4+2p=4-p\\
0\le p\le \frac{4}{3}: 4-3p+2p=4-p\\
p\le 0: 4-3p-2p=4-p
\end{cases}$$

Logo, do desenvolvimento acima:

a) O único intervalo de $p$ que gera um resultado consistente é $0\le p\le \frac{4}{3}$.

b) Como $x>0$, para o intervalo de $p$ acima, tem-se $x=\frac{(4-p)}{\sqrt{8(2-p)}}$.

**Problema 05:** Para $w\neq 3z$, as equações do enunciado podem ser mapeadas no sistema

$$\begin{cases}
x+2y=w-3z\\
x+3z=3-y-3z+w\\
2x+y+6z-2w=8
\end{cases},$$

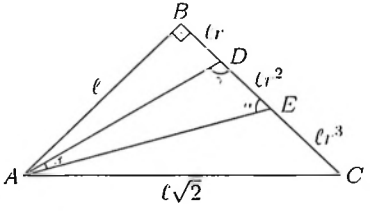
cuja solução é tal que

$$y=-\frac{8}{3}, z=-\frac{5}{3}, w\neq -5, x=w+\frac{31}{3}\neq\frac{16}{3}.$$

**Problema 06:** Com $M$ moças e $R$ rapazes, podemos formar $N_{M,R} = C_M^4 \times C_R^5$ comissões distintas. Assim, o número $N$ de comissões distintas, conforme as condições do problema, é igual a

$$\begin{aligned} N &= N_{4,1} + N_{3,2} + N_{2,3} + N_{1,4} \\ &= C_4^4 \times C_1^5 + C_3^4 \times C_2^5 + C_2^4 \times C_3^5 + C_1^4 \times C_4^5 \\ &= 1 \times 5 + 4 \times 10 + 6 \times 10 + 4 \times 5 \\ &= 5 + 40 + 60 + 20 \\ &= 125. \end{aligned}$$

**Problema 07:**




Da figura acima,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\ell}{AE}, \quad \cos\alpha = \frac{\ell r(1+r)}{AE}, \quad \cos\gamma = -\frac{\ell r}{AD}, \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{\ell}{AD},$$

de modo que

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}[180^\circ - (\alpha+\gamma)] = -\operatorname{tg}(\alpha+\gamma) = -\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma},$$

e assim

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-\ell^2 r + \ell^2 r(1+r)}{\ell^2 r^2(1+r) + \ell^2} = \frac{r^2}{r^3 + r^2 + 1} = \frac{r^2}{2-r},$$

pois $r + r^2 + r^3 = 1$.

**Problema 08:** A reta $r$ suporte de $PQ$ é descrita por $r: y = \frac{2}{5}x + 8$. Já a reta $p$, perpendicular à reta $y = x$ e que passa pelo centro $O_2 = (x_0, y_0)$ de $C_2$, tem coeficiente angular $-1$ e é descrita por $p: y = -x + (x_0 + y_0)$. A interseção $I = (x_I, y_I)$ da reta $p$ com a reta $y = x$ é dada por

$$\begin{cases} y_I = x_I \\ y_I = -x_I + (x_0 + y_0) \end{cases} \Rightarrow x_I = y_I = \frac{x_0 + y_0}{2}.$$

Assim, devemos ter

$$\begin{cases} O_2I^2 = O_2I^2 \\ O_2 \in r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_0 - 5)^2 + (y_0 - 10)^2 = \left(x_0 - \frac{x_0 + y_0}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{x_0 + y_0}{2}\right)^2 \\ y_0 = \frac{2}{5}x_0 + 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_0 - 5)^2 + \left(\frac{2}{5}x_0 + 8 - 10\right)^2 = 2\left(\frac{x_0 - \frac{2}{5}x_0 - 8}{2}\right)^2$$

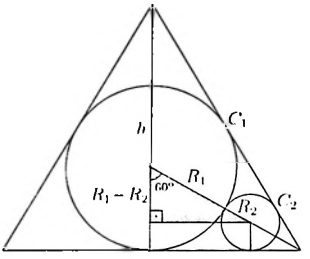
$$\Rightarrow 49x_0^2 - 340x_0 - 150 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{170 - 25\sqrt{58}}{49} \text{ e } y_0 = \frac{2}{5}x_0 + 8 = \frac{460 - 10\sqrt{58}}{49}.$$

onde o valor positivo de $x_0$ é descartada por corresponder ao caso de tangência interna entre os dois círculos. Com isso, o raio $R$ do círculo $C_2$ é dado por

$$\begin{aligned} R &= O_2P \\ &= \sqrt{\left(\frac{170 - 25\sqrt{58}}{49} - 5\right)^2 + \left(\frac{460 - 10\sqrt{58}}{49} - 10\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-75 - 25\sqrt{59}}{49}\right)^2 + \left(\frac{-30 - 10\sqrt{58}}{49}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{25^2}{49^2}(3 + \sqrt{58})^2 + \frac{10^2}{49^2}(3 - \sqrt{58})^2} \\ &= \sqrt{\frac{725(3 + \sqrt{58})^2}{49^2}} \\ &= \frac{5(3 + \sqrt{58})\sqrt{29}}{49} \\ &= \frac{5(3\sqrt{29} + 29\sqrt{2})}{49}. \end{aligned}$$

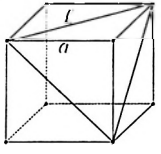
**Problema 09:**




Como o triângulo é equilátero, $R_1 = \frac{h}{3}$. Logo, do triângulo em destaque,

$$\cos 60^\circ = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = 3R_2 \Rightarrow \frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{\frac{h}{3} - \frac{h}{9}}{h} = \frac{2}{9}.$$

**Problema 10:**




A altura $h$ de um tetraedro de aresta $\ell$ é dada por

$$h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\ell\sqrt{6}}{3},$$

de modo que o volume $V_t$ desse tetraedro é tal que

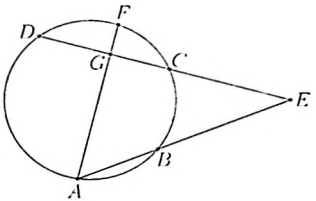
$$V_t = \frac{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}h}{3} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8}{3} \Rightarrow \ell^3 = 16\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}.$$

A aresta $\ell$ do tetraedro corresponde a uma diagonal da face do cubo. Assim, a aresta desse cubo mede $a = 2$ e o volume do cubo é $V_c = 8$. O volume de cada esfera interno ao cubo é $\frac{1}{8}$ do volume total $V_e$ da esfera. Como são 8 esferas, o volume $V$ desejado é igual a

$$V = V_c - V_e = 8 - \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4(6-\pi)}{3}\ \text{cm}^3.$$

# II.8 Vestibular 2006

**Questão 01 (D):**




Pelo conceito de potência de um ponto em relação a um dado círculo,

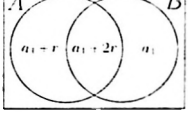
$$\begin{cases} EC \times ED = EB \times EA \\ GA \times GF = GC \times GD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \times (4 + CD) = 5 \times (5 + 7) \\ 6 \times GF = (CD - 3) \times 3 \end{cases} \Rightarrow CD = 11 \text{ e } GF = 4.$$

**Questão 02 (C):** Pela definição de $S$, devemos garantir que um elemento qualquer de $S$ é sempre subconjunto de qualquer outro elemento de $S$. Denotando $U = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, uma maneira de garantir essa propriedade fundamental é compor $S$ incrementalmente, por exemplo, da seguinte forma:

$$S = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \ldots, U\},$$

de modo que $S$ tem no máximo $(n + 1)$ elementos.

**Questão 03 (B):**




Usando a notação definida na figura acima, têm-se

$$\begin{aligned} n(A \cup B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B) - n(A \setminus B) &\Rightarrow 64 - r = 3a_1 + 3r \\ &\Rightarrow r = \frac{64 - 3a_1}{4} = 13 \\ &\Rightarrow n(A \setminus B) = a_1 - r = 17. \end{aligned}$$

**Questão 04 (E):** Resolvendo $f(x) = 0$, tem-se, para $k$ inteiro,

$$5(x + \pi/6) = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} - \frac{\pi}{6}.$$

Logo,

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} = m \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{30} = n \end{cases} \Rightarrow m + n = -\frac{2\pi}{15}.$$

**Questão 05 (C):** Desenvolvendo a equação original, para $m \neq 1$, têm-se

$$a^x(1 - m) = a^{-x}(1 + m) \Rightarrow a^{2x} = \frac{1 + m}{1 - m}.$$

Assim, devemos ter

$$\frac{1 - m}{1 - m} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + m > 0 \text{ e } 1 - m > 0 \\ \text{ou} \\ 1 + m < 0 \text{ e } 1 - m < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 1.$$

**Questão 06 (A):** Há $\binom{10}{7}$ combinações com exatamente 7 questões corretas dentre o total de 10 questões. Para as 3 questões restantes incorretas, há $4^3$ combinações de marcações possíveis para o candidato, de modo que o número total $N$ de possíveis marcações é

$$N = \binom{10}{7} 4^3 = \frac{10!}{7! \times 3!} \times 4^3 = 120 \times 4^3 = 30 \times 4^4.$$

**sIn:** A questão é dúbia no que se refere a *formas possíveis*.

**Questão 07 (B):** Mudando a base do logaritmo, têm-se

$$S = \sum_{k=0}^{101} \frac{\log_2(4^k\sqrt{2})}{\log_2 8} = \sum_{k=0}^{101} \frac{\frac{1}{2} + 2k}{3} = \frac{\left[\frac{1}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2} + 202\right)}{3}\right] \times 102}{2} = 3451.$$

Logo, $S$ corresponde à soma dos termos de uma progressão artimética finita de razão 2/3 e $S = 3451$, de modo que as afirmações II e III são as únicas verdadeiras.

**Questão 08 (C):** Como $|f(z)| = z$, para todo $z$, então, $f(z) = ze^{i\theta(z)}$. Mais especificamente, $f(1) = e^{i\theta(1)}$. Além disso,

$$|f(z) - f(1)| = \left|ze^{i\theta(z)} - e^{i\theta(1)}\right| = |z - 1|, \ \forall z.$$

então, para todo $z$, tem-se $\theta(z) = \theta(1)$, que é constante. Logo,

$$\overline{f(1)}f(z) + f(1)\overline{f(z)} = e^{-\theta(1)}ze^{i\theta(1)} + e^{i\theta(1)}\overline{z}e^{-i\theta(1)} = z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,[z].$$

**Questão 09 (D):** Desenvolvendo a equação do enunciado,

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = 4$$

$$\Rightarrow (-\cos 2x)(-\cos 2x) = 4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \pm \operatorname{sen} 2x$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}.$$

para todo $k$ inteiro.

**Questão 10 (B):** Usando a notação em coordenadas polares, podemos escrever $z = |z|e^{i\alpha}$, de modo que

$$\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = \left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha.$$

Igualando essa expressão a $i\operatorname{sen} n\alpha$, como dado no enunciado, têm-se

$$\cos n\alpha = 0 \Rightarrow n\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2n\alpha - \pi = 2k\pi.$$

**Questão 11 (A):** Simplificando o sistema, têm-se

$$\begin{cases} y + 2z = -1 \\ x + z = 3 \\ 2(3 - z) + 2(-1 - 2z) + az = b \end{cases} \Rightarrow (a - 6)z = b - 4.$$

Logo, para que o sistema seja incompatível, devemos ter $a = 6$ e $b \neq 4$, ou, equivalentemente, $a - b \neq 2$.

**sln:** A condição $a - b \neq 2$ por si só não garante que o sistema seja impossível.

**Questão 12 (D):** Desenvolvendo o determinante $D$ desejado, têm-se

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} \\ &= (-2) \times (2) \times (3) \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 \\ &= (-12) \times (-1) \\ &= 12. \end{aligned}$$

**Questão 13 (E):** Sejam $r_i$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, as raízes de $p$. Como $p$ tem coeficientes reais, se $(1 - i)$ é raiz de multiplicidade 2, então $(1 + i)$ também é raiz de multiplicidade 2. Assim, denotando a razão da progressão aritmética das raízes reais ($r_1$, $r_2$ e $r_3$) por $q$, têm-se que a soma $S$ e o produto $P$ de todas as raízes são tais que

$$S = (r_2 - q) + r_2 + (r_2 + q) + 2(1 + i) + 2(1 - i) = 10 \Rightarrow \begin{cases} r_2 = 2 \\ r_1 + r_3 = 4 \end{cases}$$

$$P = r_1 \times 2 \times r_3 \times (1 - i)^2 \times (1 + i)^2 = 8 r_1 r_3 = -40 \Rightarrow r_1 r_3 = -5.$$

Logo,

$$\begin{cases} r_1 - r_3 = 4 \\ r_1 r_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow r_1 = -1 \text{ e } r_3 = -5.$$

ou vice-versa.

**Questão 14 (E):** Como $p(2) = (32 - 40 + 16 - 6 - 2) = 0$, então $x = 2$ é raiz de $p$, que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1) \\ &= (x-2)(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1) \\ &= (x-2)[x^4 + (a+b)x^3 + (2+ab)x^2 + (a+b)x + 1]. \end{aligned}$$

Dessa forma, têm-se

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = -1 \Rightarrow p(x) = (x-2)(x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 1),$$

cujas raízes são

$$x = \left\{ 2, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \right\}.$$

Logo, $p(x)$ possui apenas 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e as outras duas irracionais.

**Questão 15 (E):** Subtraindo e adicionando as equações originais, o sistema inicial é simplificado para

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ e } y = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

se $a^2 + b^2 \neq 0$. Logo:

- Se $a = b = 0$, o sistema é impossível, e a afirmação I é falsa;
- Se $a$ e $b$ não são simultaneamente nulos, o sistema tem solução única, como indicado acima, e a afirmação II é verdadeira;
- Se $a^2 + b^2 \neq 0$,

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 16 (D):** Observando que $x = 1$ é raiz, então $p(x)$ pode ser decomposto como

$$p(x) = (x-1)(x^2 + x - a),$$

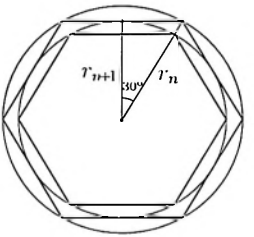
com raízes, além de $x = 1$, iguais a

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Igualando essas raízes a um natural $n$, têm-se

$$1 + 4a = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow a = n(n+1).$$

**Questão 17 (B):**




Da figura acima, a razão entre os raios de duas circunferências é

$$r_{n+1} = r_n \cos 30^\circ = r_n \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dessa forma, a razão entre as áreas de dois hexágonos é

$$A_{n+1} = A_n \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3A_n}{4}.$$

e a soma desejada é igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1 - \frac{3}{4}} = 4A_1 = 4 \times 6 \times \frac{r_1^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

**Questão 18 (X):** A reta $p$ é da forma $p : y = -\frac{5}{12}x + \beta$. Achando a(s) interseção(ões) dessa reta com $C$, têm-se

$$x^2 + \left(-\frac{5}{12}x + \beta\right)^2 + 4x + 2\left(-\frac{5}{12}x + \beta\right) = 11$$
$$\Rightarrow 169x^2 + 24[24 - 5(\beta + 1)]x + 144[(\beta + 1)^2 - 12] = 0.$$

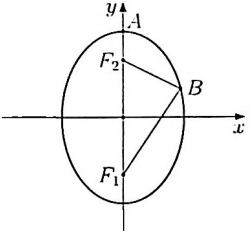
Para que a interseção seja única, de modo a garantir que $p$ seja tangente a $C$, o discriminante dessa equação deve ser nulo, de forma que

$$24^2[24 - 5(\beta + 1)]^2 - 4 \times 169 \times 144[(\beta + 1)^2 - 12] = 0$$
$$\Rightarrow 12(\beta + 1)^2 + 20(\beta + 1) - 217 = 0$$
$$\Rightarrow (\beta + 1) = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 48 \times 217}}{24} = \frac{-20 \pm 104}{24} = \frac{-5 \pm 26}{6}$$
$$\Rightarrow \beta = \begin{cases} \frac{-5-26}{6} - 1 = -\frac{37}{6} = -\frac{74}{12} \\ \frac{-5+26}{6} - 1 = \frac{5}{6} = \frac{30}{12} \end{cases}.$$

Logo, para que a reta $p$ seja secante a $C$, devemos ter $\beta \in \left(-\frac{74}{12}, \frac{30}{12}\right)$.

**sln:** Muito provavelmente, houve erro de digitação de um sinal negativo na opção (C) da prova.

**Questão 19 (D):**



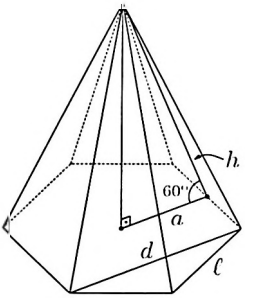

Do enunciado, a elipse tem centro na origem, distância focal $2c = 12$ e eixo maior ao longo do eixo $y$ com $2a = 18$. Logo, seu eixo menor é igual a $2b = \sqrt{18^2 - 12^2} = 6\sqrt{5}$, de modo que essa elipse é descrita por

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1.$$

Com isto, $B = (\sqrt{40}, 3)$, e a área do triângulo $\Delta BF_1F_2$ é dada por

$$S_{BF_1F_2} = \frac{12 \times \sqrt{40}}{2} = 12\sqrt{10}.$$

**Questão 20 (A):**




Sejam $a$ e $\ell$ o apótema e o lado da base hexagonal, respectivamente, de modo que, na figura acima, têm-se

$$a = \frac{d}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = h\cos 60^\circ \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \ell = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = 3 \\ h = \frac{a}{\cos 60^\circ} = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Assim, a área total da pirâmide é igual a

$$S = 6\times\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} + 6\times\frac{\ell h}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2.$$

**Problema 01:**

a) Pela definição, os conjuntos que compõem a partição $F$ de ordem $k$ devem ser disjuntos e ter o mesmo número de elementos. Logo, as ordens possíveis para uma partição de $A$ são os divisores de $n(A)$. No caso, como $n(A) = 8$, os possíveis valores são $k = 1, 2, 4$ e $8$.

b) Sejam $a_i$, com $i = 1, 2, \ldots, 8$, os elementos de $A$. Para $k = 2$, uma partição de $A$ será formada por quatro conjuntos de 2 elementos cada. Dado o elemento $a_1$, existem 7 possibilidades para formar um desses conjuntos de 2 elementos contendo $a_1$. Dado um dos 6 elementos restantes, há 5 possibilidades para se formar um conjunto de 2 elementos. Dado um dos 4 elementos restantes, há 3 possibilidades para se formar um conjunto de 2 elementos. Seguindo esse processo, o quarto conjunto de 2 elementos fica automaticamente determinado, de modo que o número total de partições distintas de ordem $k = 2$ quando $n(A) = 8$ é $N = 7\times5\times3 = 105$.

**Problema 02:** Definindo a variável auxiliar $y = x + \frac{1}{2}$, pelas definições de $f(x)$ e $g(x)$, têm-se

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} f(y), & 0 < y < \frac{1}{2} \\ 1 - f(y), & \frac{1}{2} \leq y < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2y, & 0 < y < \frac{1}{2} \\ 1 - (2y - 1), & \frac{1}{2} \leq y < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + 2x, & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1 - 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, definindo $z = -x$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \begin{cases} 1 + 2z, & -\frac{1}{2} < z < 0 \\ 1 - 2z, & 0 \leq z < \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + 2(-x), & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 - 2(-x), & -\frac{1}{2} < x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - 2x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 + 2x, & -\frac{1}{2} < x \leq 0 \end{cases} \\ &= g(x), \end{aligned}$$

de modo que $g(x)$ é uma função par.

**Problema 03:** Inicialmente, seja $c_{m,n}$ o coeficiente de $x^m$ no desenvolvimento de $(1 + x)^n$, de forma que $c_{m,n} = C_m^n$. Desenvolvendo $(1 + x + x^2)^9$, tem-se

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2)^9 &= \sum_{k=0}^{9} C_k^9 (1 + x)^k (x^2)^{9-k} \\ &= S + C_7^9 (1 + x)^7 (x^2)^2 + C_8^9 (1 + x)^8 (x^2)^1 + C_9^9 (1 + x)^9 (x^2)^0, \end{aligned}$$

onde $S = \sum_{k=0}^{6} C_k^9 (1 + x)^k (x^2)^{9-k}$ só possui termos em $x$ com expoentes estritamente maiores que 4. Logo, o coeficiente $K$ de $x^4$ no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$ é igual a

$$K = C_7^9 c_{0,7} + C_8^9 c_{2,8} + C_9^9 c_{4,9} = 36 \times 1 + 9 \times 28 + 1 \times 126 = 414.$$

**Problema 04:** Para que a desigualdade seja satisfeita, devemos ter

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \\ 4\operatorname{sen}^2 x - 1 > 0 \\ 4 - \sec^2 x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| < \frac{\pi}{2} \\ x \neq 0 \\ |x| > \frac{\pi}{6} \\ |x| < \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < |x| < \frac{\pi}{3}.$$

Além disso,

$$\log_{\cos x} \frac{\cos^2 x(4\operatorname{sen}^2 x - 1)}{4\cos^2 x - 1} > 2 \Rightarrow \log_{\cos x} \frac{4\operatorname{sen}^2 x - 1}{4\cos^2 x - 1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\log_{10} \frac{4\operatorname{sen}^2 x - 1}{4\cos^2 x - 1}}{\log_{10} \cos x} > 0$$

$$\Rightarrow \log_{10} \frac{4\operatorname{sen}^2 x - 1}{4\cos^2 x - 1} < 0.$$

já que $0 < \cos x < 1$ e assim $\log_{10} \cos x < 0$. Logo, como $4 - \sec^2 x > 0$, então

$$\frac{4\operatorname{sen}^2 x - 1}{4\cos^2 x - 1} < 1 \Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x - 1 < 4\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x < \cos^2 x$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{\pi}{4}.$$

Juntando as duas restrições, tem-se

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} < |x| < \frac{\pi}{3} \\ |x| < \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < |x| < \frac{\pi}{4}.$$

**Problema 05:** Sejam $r_1$, $r_2$ e $r_3$ as raízes de $p(x)$. Por Girard, a soma das raízes $r_1 + r_2 + r_3 = -a$ é racional. Além disso, do enunciado, considere que $r_1 - r_2$ é racional.

- Se $r_1$ é racional, então, $r_2$ também o é, pois $r_1 - r_2$ é racional. Além disso, como $r_1 + r_2 + r_3 = -a$ é racional, então $r_3$ também será racional.
- Analogamente, se $r_2$ é racional, então $r_1$ (pois $r_1 - r_2$ é racional) e $r_3$ (já que $(r_1 + r_2 + r_3 = -a$ é racional) também são racionais.
- Por fim, se $r_3$ é racional, então $r_1 + r_2 = (-a - r_3)$ e $r_1 - r_2$ são racionais, de modo que $r_1$ e $r_2$ também o são.

Pelos itens acima, conclui-se que afirmação do enunciado é verdadeira.

**Problema 06:** Sejam o raio $r$, a altura $h$ e a geratriz $g$ do cone. Pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} r^2 + h^2 = g^2 &\Rightarrow (h-2)^2 + h^2 = (h+2)^2 \\ &\Rightarrow h^2 = 8h \\ &\Rightarrow h = 8 \\ &\Rightarrow r = 6 \text{ e } g = 10, \end{aligned}$$

de modo que a área total do cone é

$$S_c = \pi r^2 + \pi r g = 36\pi + 60\pi = 96\pi \text{ m}^2.$$

**Problema 07:** A inversa de uma matriz bloco-diagonal é formada pelas inversas de seus blocos. Assim,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{9} & -\frac{3}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}.$$

de modo que $c_{34} = -\frac{2}{11}$.

**Problema 08:** Os termos de índices pares formam uma progressão geométrica de primeiro termo $a_2 = ar$ e razão $r^2$. Já os termos de índices múltiplos de 3 formam uma progressão geométrica de primeiro termo $a_3 = ar^2$ e razão $r^3$. Dessa forma, as respectivas somas $S_2$ e $S_3$ dessas sub-sequências são tais que

$$\begin{cases} S_2 = \frac{ar}{1-r^2} = 4 \\ S_3 = \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{16}{13} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_3}{S_2} = \frac{r(1-r^2)}{(1-r^3)} = \frac{r(1+r)}{(1+r+r^2)} = \frac{4}{13}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 9r^2 + 9r - 4 = 0 \\ &\Rightarrow r = \frac{-9 + \sqrt{81+144}}{18} = \frac{-9+15}{18} = \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow a = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

de modo que $a + r = 11$.

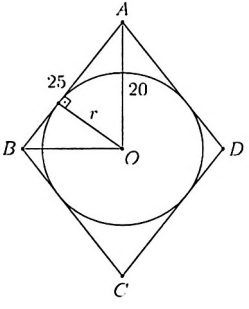
**Problema 09:** Completando os quadrados, a equação da hipérbole pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
&(3y-24)^2 - 576 - (4x-28)^2 + 784 - 352 = 0 \\
\Rightarrow\ &9(y-8)^2 - 16(x-7)^2 = 144 \\
\Rightarrow\ &\frac{(y-8)^2}{\frac{144}{9}} - \frac{(x-7)^2}{\frac{144}{16}} = 1 \\
\Rightarrow\ &\frac{(y-8)^2}{4^2} - \frac{(x-7)^2}{3^2} = 1.
\end{aligned}$$

Logo, os eixos principal e secundário da hipérbole são tais que

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2c = 2\sqrt{4^2+3^2} = 10.$$

**Problema 10:**




Seja $O$ o centro do losango. Do triângulo $\Delta AOB$,

$$BO = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

de modo que o raio $r$ do círculo inscrito é igual a

$$r \times AB = AO \times BO \Rightarrow r = \frac{20 \times 15}{25} = 12 \text{ cm}.$$

# II.9 Vestibular 2005

**Questão 01 (B):**

- O correto seria $0 \in S$ ou ainda $\{0\} \subset S$, e não $\{0\} \in S$, e a afirmação I é falsa;
- Como $S \cap T \cap U = \emptyset$, a afirmação II é falsa;
- Como $n(T) < n(S)$, então pelo menos dois elementos de $S$ serão mapeados num mesmo elemento de $T$, de modo que não existe função $f : S \to T$ injetiva, e a afirmação III é falsa;
- Como $n(T) < n(S)$, então pelo menos um elemento de $S$ não será imagem de um função de domínio $T$, de modo que não existe função $g : T \to S$ sobrejetiva, e a afirmação IV é verdadeira.

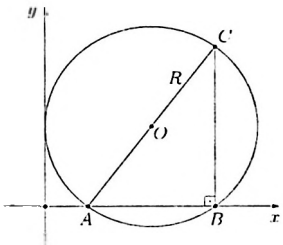
**Questão 02 (D):** Sejam $s$, $x$ e $t$ os números de sanduíches, xícaras de café e pedaços de torta, respectivamente, consumidos em uma mesa. Do enunciado,

$$\begin{cases} 3s + 7x + 1t = 31{,}50 \\ 4s + 10x + 1t = 42{,}00 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação multiplicada por 3 da segunda equação multiplicada por 2, tem-se

$$(9-8)s + (21-20)x + (3-2)t = 94{,}50 - 84{,}00 \Rightarrow s + x + r = 10{,}50.$$

**Questão 03 (D):**




Como $AB$ é perpendicular a $BC$, então $AC$ é diâmetro da circunferência, cujo centro $O$ e raio $R$, então, são dados por

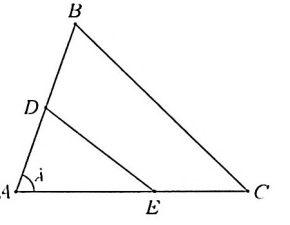
$$\begin{cases} O = \frac{A+C}{2} = (4,5) \\ R = OC = \sqrt{(8-4)^2 + (8-5)^2} = 5 \end{cases}$$

**Questão 04 (B):** Elevando ao quadrado,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} &\Rightarrow x^2 - 4 - (2x - 4)\sqrt{3} = 0 \\ &\Rightarrow (x + 2)(x - 2) - 2(x - 2)\sqrt{3} = 0 \\ &\Rightarrow (x - 2)(x + 2 - 2\sqrt{3}) = 0 \\ &\Rightarrow x = 2, \end{aligned}$$

pois, da expressão inicial, $x > \sqrt{3}$. Logo, $x$, $\sqrt{2x} = 2$ e $x^2 = 4$ são racionais.

**Questão 05 (D):**



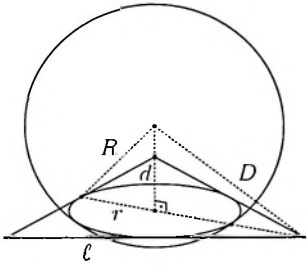

Dos dados do problema,

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{AD \times AE \operatorname{sen} \hat{A}}{2}}{\frac{AB \times AC \operatorname{sen} \hat{A}}{2}} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC} = \frac{4 \times 6}{8 \times 10} = \frac{3}{10}.$$

**Questão 06 (C):** Em um triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede a metade da hipotenusa $c$. Denotando os catetos por $a$ e $b$, têm-se

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{c}{2} = \sqrt{ab} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} &\Rightarrow c^2 = a^2 + \left(\frac{c^2}{4a}\right)^2 \\ &\Rightarrow 16a^4 - 16a^2c^2 + c^4 = 0 \\ &\Rightarrow a^2 = \frac{\left(16 \pm \sqrt{256 - 64}\right)c^2}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4} c^2 \\ &\Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}{2}. \end{aligned}$$

**Questão 07 (C):**




O raio $r$ da circunferência inscrita no triângulo equilátero de lado $\ell = 6$ é

$$r = \frac{1}{3}\,\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}.$$

Assim, a distância $d$ do plano ao centro da esfera de raio $R = 4$ é dada por

$$d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}.$$

de modo que a distância $D$ do centro da esfera a um vértice do triângulo é igual a

$$D = \sqrt{d^2 + (2r)^2} = \sqrt{13 + 12} = 5 \text{ cm}.$$

**Questão 08 (C):** O número $n$ de planos meridianos é igual ao respectivo número de cunhas na semi-esfera. Igualando a soma dos volumes das cunhas na semi-esfera ao volume da própria semi-esfera, têm-se

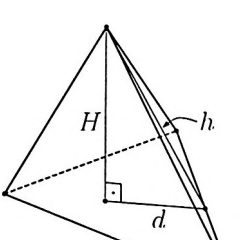
$$\frac{4\pi r^3}{6} = \left[\frac{\pi r^3}{18} + \frac{\pi r^3}{18} + (n-1)\frac{\pi r^3}{45}\right]\frac{n}{2} = \frac{(4+n)n\pi r^3}{90} \Rightarrow n^2 + 4n = 60 \Rightarrow n = 6.$$

**Questão 09 (E):** Seja $n$ o número de lados da base do prisma. Dessa forma, a soma dos ângulos internos de todas as faces do prisma é igual à soma $2(n-2)180^\circ$ dos ângulos internos das duas bases mais a soma $2n180^\circ$ dos ângulos internos das $n$ faces laterais retangulares. Assim, devemos ter

$$2(n-2)\times 180^\circ + 2n\times 180^\circ = 40\times 180^\circ \Rightarrow n = 11,$$

de modo que o prisma tem $V = 2n = 22$ vértices.

**Questão 10 (A):**




Na figura acima, $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e $d = \frac{h}{3}$. Com isso,

$$H = \sqrt{h^2 - d^2} = \sqrt{\frac{8h^2}{9}} = \frac{2h\sqrt{2}}{3} = \frac{2\ell\sqrt{6}}{6}.$$

Logo, volume $V$ de um tetraedro regular de aresta $\ell = 2\sqrt{2}$ é dado por

$$V = \frac{\frac{\ell h}{2} H}{3} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8}{3}.$$

**Questão 11 (A):** Do enunciado, $p(1) = 32$ e $p(0) = p(-1) = 0$, e assim

$$\begin{cases} (a - 2b + c + 1)^5 = 32 \\ (c + 1)^5 = 0 \\ (a + 2b + c + 1)^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = -1 \Rightarrow a + b + c = -\frac{1}{2}.$$

**Questão 12 (B):** Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 10^{-2} &\Rightarrow n - 2\sqrt{n(n-1)} + (n-1) < 10^{-4} \\ &\Rightarrow 2n - (1 + 10^{-4}) < 2\sqrt{n(n-1)} \\ &\Rightarrow 4n^2 - 4(1 + 10^{-4})n + (1 + 10^{-4})^2 < 4n(n-1) \\ &\Rightarrow n > \frac{(1 + 10^{-4})^2}{4 \times 10^{-4}} \approx \frac{1 + 2 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-4}} = \frac{10^4 + 2}{4} \\ &\Rightarrow n > 2500{,}5. \end{aligned}$$

Logo, o menor inteiro positivo $n$ que satisfaz a condição do enunciado é 2501.

**Questão 13 (A):**

- A função $f(x)$ pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Logo, o gráfico de $f(x)$ é uma hipérbole com assíntotas horizontal em $y = 1$ e vertical em $x = 1$, de modo que $f(x)$ é bijetiva, e afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa;

- De fato, para $x \neq 0$,

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1+x}{1-x} = 0.$$

e a afirmação III é verdadeira;

- A expressão $f(x) \times f(-x)$ não é definida para $x = -1$, e, por isso mesmo, a afirmação IV é falsa.

**Questão 14 (E):** Como os coeficientes de $f(x)$ são reais, se $2+i$ é raiz, então $2-i$ também é raiz. Logo, dividindo $p(x)$ por $q(x) = [x-(2+i)][x-(2-i)] = (x^2-4x+5)$, tem-se

$$p(x) = q(x)[x^2 + 5x + (p+15)] + [4(p+9)x + q - 5(p+15)],$$

de modo que

$$\begin{cases} p = -9 \\ q = 30 \end{cases} \Rightarrow p(x) = q(x)(x^2+5x+6) = q(x)(x+3)(x+2).$$

Logo, a soma das raízes reais é $-5$.

**Questão 15 (B):** Tirando o logaritmo neperiano da equação inicial,

$$(x+1)\ln a = \frac{1}{x}\ln b \Rightarrow (x+1) = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0,$$

de modo que, por Girard, a soma das soluções é $-1$,

**Questão 16 (C):** É simples ver que o lado esquerdo $E(x)$ da desigualdade do enunciado é uma função par de $x$ tal que

$$\lim_{x\to-\infty} E(x) = \lim_{x\to+\infty} E(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1+x}{2}\right)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2} \\
&= \frac{2[4+(1-x)^2] - 2[4+(1+x)^2]}{[4+(1+x)^2][4+(1-x)^2]} \\
&= -\frac{8x}{(x^2+5)^2 - 4x^2} \\
&= -\frac{8x}{(x^2+3)^2+16},
\end{aligned}$$

de modo que $E(x)$ é crescente no intervalo $x \in (-\infty, 0)$ e decrescente no intervalo $x \in (0, +\infty)$, possuindo assim um máximo global em $E(0) = \frac{\pi}{2}$.

Considerando o intervalo em que $E(x)$ é crescente e aplicando a função tangente à desigualdade do enunciado, devemos ter

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} E(x) &= \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{2}\right) \\
&= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2}}{1 - \frac{1+x}{2}\frac{1-x}{2}} \\
&= \frac{4}{4-(1+x)(1-x)} \\
&\geq \operatorname{tg}\frac{\pi}{6},
\end{aligned}$$

e assim

$$\frac{4}{4-(1+x)(1-x)} \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x^2 \leq 4\sqrt{3} - 3 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{4\sqrt{3}-3} \approx 1.982.$$

Considerando a simetria par de $E(x)$ e o valor de $E(0)$, tem-se o intervalo $I$ contido em $[-2, 3]$.

**Questão 17 (D):** Como $|z| = 1$, então, usando a notação em coordenadas polares, podemos escrever $z = e^{i\theta}$, de modo que

$$\left|\frac{1 - \bar{z}w}{z - w}\right| = \left|\frac{1 - e^{-i\theta}w}{e^{i\theta} - w}\right| = \left|\frac{e^{-i\theta}(e^{i\theta} - w)}{e^{i\theta} - w}\right| = |e^{-i\theta}| = 1.$$

para todo $w \neq z$.

**Questão 18 (A):** Considerando

$$\begin{cases} x = 1 - bz \\ y = 1 - bx = 1 - b(1 - bz) = 1 - b + b^2 z \end{cases}$$

o sistema se reduz a

$$b(1 - b + b^2 z) + z = 1 \Rightarrow (b^3 + 1)z = b^2 - b + 1$$
$$\Rightarrow (b + 1)(b^2 - b + 1)z = (b^2 - b + 1).$$

Para que o sistema não admita solução, devemos ter

$$\begin{cases} (b + 1)(b^2 - b + 1) = 0 \\ (b^2 - b + 1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow b = -1.$$

**Questão 19 (E):** Considerando que não reposição das bolas,

$$\begin{cases} P_1 = \frac{11}{16} \times \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \\ P_2 = \frac{4}{16} \times \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} + \frac{5}{16} \times \frac{4}{15} \times \frac{4}{14} - \frac{7}{16} \times \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} \end{cases}$$

e assim,

$$P_1 + P_2 = \frac{990 + 24 + 60 + 210}{16 \times 15 \times 14} = \frac{107}{280} 1074514 = 0.382.$$

**Questão 20 (X):** Uma elipse centrada na origem é descrita pela equação $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy = 1$. Forçando essa elipse a passar pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -2)$, têm-se $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{4}$, de modo que essa equação se torna $x^2 + \frac{y^2}{4} + \gamma xy = 1$.

De modo geral, a distância focal e a excentricidade da elipse são funções de $\gamma$, e a questão apresenta infinitas possibilidades. Em particular, assumindo que os eixos da elipse estão alinhados com os eixos cartesianos, tem-se $\gamma = 0$, e assim

$$\begin{cases} 2c = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{4 - 1} = 2\sqrt{3} \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

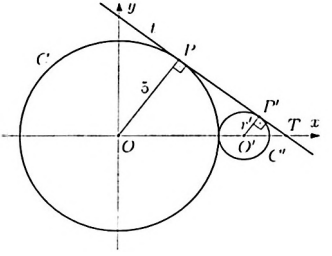
**Problema 01:** Seja $r$ a razão da progressão aritmética original. A sequência de termos $a_{3k}$ é uma progressão aritmética de primeiro termo $a_3 = (a_1 + 2r)$ e razão $3r$, de forma que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = \frac{(a_3 + a_{3n})n}{2} = \frac{[a_1 + 2r + a_1 + (3n-1)r]n}{2} = \frac{(2a_1 + r)n + 3n^2 r}{2}.$$

Logo, devemos ter

$$\frac{(2a_1 + r)n + 3n^2 r}{2} = n\sqrt{2} + \pi n^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3r}{2} = \pi \\ \frac{2a_1 + r}{2} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{2\pi}{3} \\ a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

**Problema 02:**




Na verdade, existem duas circunferências que satisfazem as condições do problema. Sejam elas $C'$, com raio $r'$ e centro em $O' = (5 + r', 0)$, conforme a figura acima, e $C''$, com raio $r''$ e centro em $O'' = (-5 - r'', 0)$, que na figura acima ficaria à esquerda de $C'$.

A reta $p$, que passa pela origem e por $P$, é descrita por $p : y = \frac{4}{3}x$. Logo, a reta $t$, perpendicular a $p$ e que passa por $P$, é descrita por $t : y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$, e sua interseção com o eixo $x$ é o ponto $T = (\frac{25}{3}, 0)$. Além disso, a reta $p'$, paralela a $p$ e que passa por $O'$, é descrita por $p' : y = \frac{4}{3}(x - 5 - r')$. Assim, a interseção $P' = (x'_p, y'_p)$ das retas $t$ e $p'$ é tal que

$$\begin{cases} y'_p = \frac{4}{3}(x'_p - 5 - r') \\ y'_p = -\frac{3}{4}x'_p + \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow x'_p = \frac{155 + 16r}{25} \text{ e } y'_p = \frac{40 - 12r}{25}.$$

Dessa forma, pela semelhança dos triângulos $\Delta TO'P'$ e $\Delta TOP$, tem-se

$$\frac{TO'}{O'P'} = \frac{TO}{OP} \Rightarrow \frac{\frac{25}{3} - (5 + r')}{r'} = \frac{\frac{25}{4}}{5} \Rightarrow r' = \frac{5}{4} \Rightarrow O' = (\frac{25}{4}, 0).$$

Para a circunferência $C''$, tem-se

$$\frac{TO''}{O''P''} = \frac{TO}{OP} \Rightarrow \frac{\frac{25}{3} + (5 + r'')}{r''} = \frac{\frac{25}{3}}{5} \Rightarrow r'' = 20 \Rightarrow O'' = (-25, 0).$$

**Problema 03:**

a) Pré- e pós-multiplicando a relação $AB = BA$ por $B^{-1}$, tem-se

$$B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}.$$

b) Da relação $A^2 + 2AB - B = 0$, tem-se

$$B = A(A + 2B) \Rightarrow \det B = \det A \times \det(A + 2B).$$

Como $\det B \neq 0$, já que $B$ é inversível, então $\det A \neq 0$, de modo que $A$ também é inversível.

**Problema 04:** A soma dos ângulos internos de um polígono de $n$ lados é $(n-2)180°$. Além disso, um ângulo interno $\theta$ é tal que $0 < \theta < 180°$. Logo, a soma $S = 2004°$ de $(n-1)$ ângulos internos desse polígono deve satisfazer

$$\begin{aligned}(n-2)180° - 180° < 2004° < (n-2)180° &\Rightarrow \frac{2004° + 360°}{180°} < n < \frac{2004° - 540°}{180°} \\ &\Rightarrow 13.\overline{13} < n < 14.\overline{13} \\ &\Rightarrow n = 14.\end{aligned}$$

**Problema 05:**

a) Seja $p(x) = x^3 + 3x - 4$. Logo,

$$\begin{aligned}p(\alpha) &= \left(\sqrt[4]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{5}}\right)^4 + 3\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 \\ &= (2+\sqrt{5}) + 3\sqrt[4]{(2+\sqrt{5})^2(2-\sqrt{5})} + 3\sqrt[4]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})^2} \\ &\quad + (2-\sqrt{5}) + 3\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{5}}\right) - 4 \\ &= 3\sqrt[4]{(-1)(2+\sqrt{5})} - 3\sqrt[4]{(-1)(2-\sqrt{5})} + 3\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{5}}\right) \\ &= -3\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{5}}\right) + 3\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[4]{2-\sqrt{5}}\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

de modo que $\alpha$ é raiz de $p(x)$.

b) Por inspeção, é simples perceber que $x = 1$ é raiz de $p(x)$, que, por isso mesmo, pode ser decomposto como

$$p(x) = (x-1)(x^2 + x + 4),$$

cujas demais raízes, $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$, são complexas. Logo, como $\alpha$ é real, então $\alpha = 1$.

**Problema 06:**

a) Elevando ao quadrado,

$$\begin{aligned}
& x^2 = (1+mx) - 2\sqrt{(1+mx)(1-mx)} + (1-mx) \\
\Rightarrow\ & 2\sqrt{1-m^2x^2} = 2 - x^2 \\
\Rightarrow\ & 4(1-m^2x^2) = 4 - 4x^2 + x^4 \\
\Rightarrow\ & x^4 + 4(m^2-1)x^2 = 0 \\
\Rightarrow\ & \begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 = 4(1-m^2) \end{cases} \\
\Rightarrow\ & x = 0 \text{ ou } x = \pm 2\sqrt{1-m^2}.
\end{aligned}$$

b) A solução $x = 0$ é válida para todo valor de $m$. Para $x > 0$, porém, a equação do enunciado nos diz que

$$\sqrt{1+mx} > \sqrt{1-mx} \Rightarrow 1 + mx > 1 - mx \Rightarrow mx > 0 \Rightarrow m > 0.$$

Analogamente, para $x < 0$,

$$\sqrt{1+mx} < \sqrt{1-mx} \Rightarrow 1 + mx < 1 - mx \Rightarrow mx < 0 \Rightarrow m > 0.$$

Ou seja, para $x \neq 0$, devemos necessariamente ter $m > 0$.

Além disso, como $x^2 = 4(1-m^2)$, então, para existir solução não nula real, devemos ter $|m| < 1$.

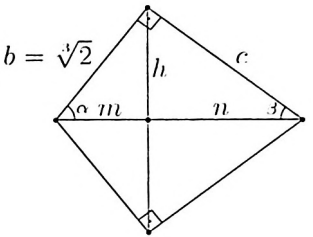
Por fim, no desenvolvimento do item anterior, têm-se

$$2 - x^2 = 2\sqrt{1-m^2x^2} \geq 0 \Rightarrow x^2 = 4(1-m^2) \leq 2 \Rightarrow m^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Juntando todas as restrições acima, têm-se

$$\begin{cases} m > 0 \\ |m| < 1 \\ |m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1.$$

**Problema 07:**




Usando a notação da figura acima, o sólido gerado é composto por dois cones de alturas $m$ e $n$ e base comum de raio $h$. Logo,

$$\frac{\pi h^2 m}{3} + \frac{\pi h^2 n}{3} = \frac{\pi h^2 (m+n)}{3} = \pi \Rightarrow h^2(m+n) = 3.$$

Com isso, usando as propriedades do triângulo retângulo

$$\begin{cases} bc = h(m+n) \\ (m+n)^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

tém-se

$$\frac{b^2 c^2}{m+n} = 3 \Rightarrow \frac{b^4 c^4}{9} = b^2 + c^2 \Rightarrow b^4 c^4 - 9c^2 - 9b^2 = 0.$$

de modo que

$$c^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 36b^6}}{2b^4} = \frac{9 \pm 15}{4\sqrt{2}} \Rightarrow c = \sqrt{3}\sqrt[4]{2}$$

$$\Rightarrow (m+n) = \sqrt{\sqrt{4} + 3\sqrt{4}} = 2\sqrt[4]{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{m+n} = \frac{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}{2\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ \text{ e } \beta = 30^\circ.$$

além, é claro, do ângulo de $90^\circ$.

**Problema 08:** Pela definição de probabilidade condicional,

$$P(V|V) = \frac{P(V,V)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

**Problema 09:** Usando transformação em produto, o sistema pode ser escrito como

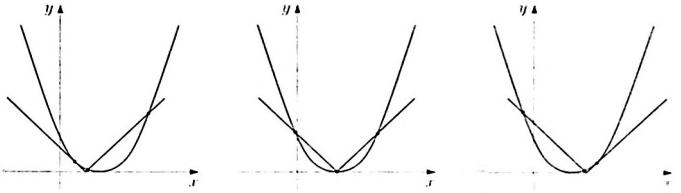
$$\begin{cases} 2\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \end{cases}.$$

de modo que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x + \frac{1}{4\operatorname{sen} x} = 1 &\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow (2\operatorname{sen} x - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos y = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \end{cases}, \end{aligned}$$

e os possíveis pares $(x, y)$ são $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3})$, $(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ e $(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3})$.

**Problema 10:**



O gráfico de $(x-1)^2$ é uma parábola com concavidade para cima e vértice em $(1,0)$. Já o gráfico de $|x-a|$ é formado por duas retas com coeficientes angulares $\pm 1$ com um vértice, não diferenciável, em $(a,0)$.

Para que os gráficos apresentes exatamente três interseções, três situações podem ocorrer, conforme ilustrado na figura acima:

- A reta com coeficiente angular $-1$ de $|x-a|$ tangencia a parte esquerda da parábola e a reta de coeficiente angular $+1$ intercepta a parábola em dois pontos. Neste caso, o ponto de tangência $T=(x_t, y_t)$ será tal que

$$2(x_t-1)=-1 \Rightarrow x_t=\frac{1}{2} \Rightarrow y_t=(x_t-1)^2=\frac{1}{4}=-(x_t-a) \Rightarrow a=\frac{3}{4}.$$

- Os vértices de ambas curvas coincidem, de modo que $a=1$, e as retas de coeficientes $\pm 1$ interceptam a parábola em um ponto cada uma.

- A reta com coeficiente angular $+1$ de $|x-a|$ tangencia a parte direita da parábola e a reta de coeficiente angular $-1$ intercepta a parábola em dois pontos. Neste caso, o ponto de tangência $T=(x_t, y_t)$ será tal que

$$2(x_t-1)=+1 \Rightarrow x_t=\frac{3}{2} \Rightarrow y_t=(x_t-1)^2=\frac{1}{4}=(x_t-a) \Rightarrow a=\frac{5}{4}.$$

## II.10 Vestibular 2004

**Questão 01 (C):**

- Nesse caso, não é correto dizer $\emptyset \subset U$, mas sim $\emptyset \subset U$, e a afirmação I é falsa e a afirmação II é verdadeira;
- No caso, $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$, e a afirmação III é verdadeira;
- No caso, $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$, e a afirmação IV é falsa.

**Questão 02 (D):** O conjunto $S$ é tal que $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, com $r \in \mathbb{Q}$. Assim,

- $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$, e a afirmação I é verdadeira;
- $\left\{x \in \mathbb{R} \cdot 0 \leq x \leq \sqrt{2}\right\} \cap S = S$, e afirmação II é falsa;
- $\sqrt{2} \notin S$, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, e afirmação III é falsa.

**Questão 03 (C):** Desenvolvendo a desigualdade do enunciado, devemos ter

$$a^{2x-\frac{2x^2}{2}} < 1 \Rightarrow (2x - x^2)\log_{10} a < \log_{10} 1 \Rightarrow 2x - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 2,$$

pois $0 < a < 1$ e assim $\log_{10} a < 0$.

**Questão 04 (B):** Usando a notação em coordenadas polares, $f(x) = 2e^{ix}$, de modo que

$$f(x)f(y) = 2e^{ix}2e^{iy} = 4e^{i(x+y)} = 2f(x + y).$$

**Questão 05 (A):** Seja $r$ a reta formada pelos 5 pontos alinhados. Para formar triângulos, temos as possibilidades:

- Tomamos 3 dos 7 pontos fora de $r$;
- Tomamos 2 dos 7 pontos fora de $r$ e 1 dos 5 pontos em $r$;
- Tomamos 1 dos 7 pontos fora de $r$ e 2 dos 5 pontos de $r$.

Assim, o total de possíveis triângulos é

$$C_3^7 + C_2^7 \times C_1^5 + C_1^7 \times C_2^5 = 35 + 21 \times 5 + 7 \times 10 = 210.$$

**Questão 06 (A):** Como $2^x \neq 0$, então o determinante de $A$ só se anula se

$$\frac{1}{x^2+1} = \log_2 5 \Rightarrow x^2 = \log_5 2 - 1 = \log_5 \frac{2}{5} < 0.$$

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, a matriz $A$ é inversível.

**Questão 07 (B):** Seja $C$ a expressão cujo valor é requisitado. Usando o desenvolvimento do cosseno da soma de dois ângulos, tem-se

$$\begin{aligned} C &= \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right) - \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{4}{5}\right) \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\times\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5}\times\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\times\frac{3}{5} \\ &= \frac{7}{25}. \end{aligned}$$

**Questão 08 (E):** A soma dos ângulos internos do polígono de nove lados é igual a $7\times 180°$. Assim, devemos ter

$$\frac{(a_1 + a_1 + 8\times 5°)\,9}{2} = 7\times 180° \Rightarrow a_1 = 120° \Rightarrow a_9 = 120° + 8\times 5° = 160°.$$

**Questão 09 (E):** Simplificando,

$$\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[4]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right) = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} - \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{6}}\right],$$

de modo que o $p$-ésimo termo $t_p$ do binômio, com $p = 12, 11, \ldots, 1, 0$, é dado por

$$t_p = C_p^{12}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{p}{2}}\left(-\frac{5}{3}\right)^{\frac{12-p}{3}} x^{-\frac{p}{4}} x^{\frac{12-p}{6}} = C_p^{12}(-1)^{\frac{12-p}{3}}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{5p-24}{6}} x^{\frac{8-p}{2}}.$$

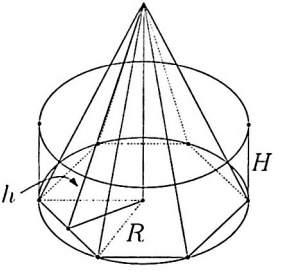
Logo, para que esse termos seja independente de $x$, devemos ter $p = 8$ e assim

$$t_4 = C_4^{12}\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{4}{3}} = 495\left(\frac{25}{9}\times\frac{3}{3}\right)^{\frac{4}{3}} = 165\sqrt[3]{75}.$$

**Questão 10 (D):**

- Para que $\det A = 0$, basta que uma linha (ou coluna) de $A$ seja múltipla da outra, sem a necessidade de uma linha (ou coluna) de $A$ seja nula, e assim a afirmação I é falsa;
- De fato, o determinante de uma matriz triangular inferior ou superior é o produto dos elementos de sua diagonal principal, e assim a afirmação II é verdadeira;
- Multiplicando-se uma linha ou coluna de uma matriz por uma constante, seu determinante fica multiplicado pela mesma constante. No caso, multiplicando uma coluna por $\sqrt{2}+1$ e outra por $\sqrt{2}-1$, o determinante fica multiplicado por $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$, e assim a afirmação III é verdadeira.

**Questão 11 (A):**




Sejam $R$ o raio da base do cilindro, $H$ a altura do cilindro e $h$ a altura de uma face lateral da pirâmide. Assim, dos dados do enunciado, têm-se

$$\begin{cases} 6\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \\ \pi R^2 H = 360\pi \end{cases} \Rightarrow R = 6 \text{ e } H = 10,$$

de modo que

$$h = \sqrt{(2H)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{400 + 27},$$

e assim, a área lateral da pirâmide é dada por

$$S_l = 6\frac{R \times h}{2} = 18\sqrt{427} \text{ cm}^2.$$

**Questão 12 (D):** Resolvendo a equação, têm-se

$$x^2 = \frac{\sqrt{18} \pm \sqrt{\sqrt{18} - 4\operatorname{tg}\alpha}}{2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha}$$

Assim, devemos ter

$$\begin{cases} \sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha \geq 0 \\ \sqrt{3} - \sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \operatorname{tg}\alpha \leq \sqrt{3} \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}.$$

**Questão 13 (D):** Desenvolvendo $f(x)$ e $g(x)$, têm-se

$$\begin{cases} f(x) = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} \\ g(x) = -\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4} \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{cases} f_{\min} = f(-\frac{\alpha}{2}) = -\frac{\alpha^2}{4} \\ g_{\max} = g(-\frac{\beta}{2}) = \frac{\beta^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 4 \text{ e } \alpha > 0 \\ \beta^2 = 9 \text{ e } \beta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}.$$

Com isso, $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = -(x^2 - 3x)$ e assim,

$$(f \circ g)(x) = [-(x^2 - 3x)]^2 + 2[-(x^2 - 3x)] = (x^2 - 3x)(x^2 - 3x - 2).$$

cuja soma $S$ das raízes reais é

$$S = 0 + 3 + \frac{3 + \sqrt{17}}{2} + \frac{3 - \sqrt{17}}{2} = 6.$$

**Questão 14 (B):** Do enunciado, devemos ter

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{7}{4} \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Com isto, o produto $P$ de todos os números que satisfazem as condições do problema é igual a

$$P = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1 + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}.$$

**Questão 15 (B):** Seja $p(x)$ o polinômio dado. Para que $x = r$ seja uma raiz dupla de $p(x)$, então $r$ deve ser raiz também de $p'(x)$, isto é

$$p'(r) = 2(12r^2 - 4r - 21) = 0 \Rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 1008}}{24} = \frac{1 \pm 8}{6} = \frac{3}{2} \text{ ou } -\frac{7}{6}.$$

Testando essas duas soluções em $p(x)$, têm-se

$$\begin{cases} p(\frac{3}{2}) = 8\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 42\left(\frac{3}{2}\right) + 45 = 27 - 9 - 63 + 45 = 0 \\ p(-\frac{7}{6}) = -8\left(-\frac{7}{6}\right)^3 - 4\left(-\frac{7}{6}\right)^2 + 42\left(-\frac{7}{6}\right) + 45 = -\frac{490}{27} + 94 \end{cases}$$

de modo que $r = \frac{3}{2} \approx 1.52$.

**Questão 16 (C):** O determinante de uma matriz não se altera quando subtraímos uma linha da outra. Assim, subtraindo, por exemplo, a última linha de cada uma das três primeiras linhas e usando Laplace na última coluna resultante, o determinante $D$ dado é igual a

$$D = \begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 & 0 \\ 6 & -3 & 3 & 0 \\ -30 & -3 & -3 & 0 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+y^2-34 & x-5 & y-3 \\ 6 & -3 & 3 \\ -30 & -3 & -3 \end{vmatrix},$$

de modo que

$$\begin{aligned} D = {} & 9(x^2+y^2-34) - 90(x-5) - 18(y-3) - 90(y-3) + 9(x^2+y^2-34) + 18(x-5) \\ & - 18[(x^2+y^2-34) - 4(x-5) - 6(y-3)] \\ & - 18[(x-2)^2 + (y-3)^2 - 9] \end{aligned}$$

Logo, fazendo $D = 288$, o lugar geométrico desejado corresponde à circunferência

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{288}{18} + 9 = 25.$$

**Questão 17 (A):** Lembrando que $|z| = z \times \overline{z}$, a equação do enunciado pode ser escrita como

$$z(z^2 + z - \overline{z} + 2) = 0.$$

Denotando $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais, devemos, então, ter $z = 0$ ou

$$\begin{aligned} (a+bi)^2 + (a+bi) - (a-bi) + 2 = 0 \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 + 2bi + 2 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2 = 0 \\ ab + b = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = \pm\sqrt{3}, \end{aligned}$$

pois $b = 0$ não gera solução real para $a$. Logo, a soma $S$ das raízes é igual a

$$S = 0 + (-1 + i\sqrt{3}) + (-1 - i\sqrt{3}) = -2.$$

**Questão 18 (E):** Por inspeção, observa-se que $x = -1$ é raiz da equação do enunciado, de modo que o polinômio $p(x)$ dado pode ser decomposto da forma

$$p(x) = (x + 1)(x^2 + m + 9).$$

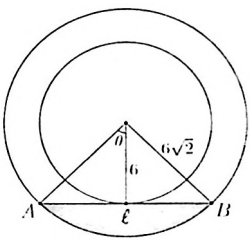
cujas outras raízes são

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 36}}{2}.$$

Logo:

- Se $m \in ]-6, 6[$, então existe apenas uma raiz real $x = -1$, e a afirmação I é verdadeira e a afirmação III é falsa;
- Se $m = \pm 6$, então existe raiz $x = -\frac{m}{2}$ com multiplicidade 2, e a afirmação II é verdadeira.

**Questão 19 (C):**




Usando a notação da figura acima, tem-se $\cos\theta = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de modo que $\theta = 45°$, e ainda $\frac{\ell}{2} = 6$, ou seja, $\ell = 12$. Com isso, a área $S$ do segmento circular é dada por

$$S = \frac{1}{4}\pi(6\sqrt{2})^2 - \frac{\ell \times 6}{2} = 18\pi - 36 = 18(\pi - 2).$$

**Questão 20 (E):** A área total $S_t$ de um cone circular reto de geratriz $g$ é dada por $S_t = \pi R^2 + \pi Rg$. A seção meridiana desse cone mede $2(g + R)$, de modo que devemos ter

$$\pi R^2 + \pi Rg = \frac{1}{3}\pi(g + R)^2 \Rightarrow 3R(R + g) = (g + R)^2 \Rightarrow g = 2R.$$

Assim, o volume $V$ desse cone é igual a

$$V = \frac{\pi R^2\sqrt{g^2 - R^2}}{3} = \frac{\pi R^2\sqrt{4R^2 - R^2}}{3} = \frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}.$$

**Problema 01:**

a) Em $\mathcal{P}(A)$, há $C_m^m = 1$ conjunto de zero elemento (o conjunto vazio $\emptyset$), $C_{m-1}^m = m$ conjuntos com um elemento de $A$ cada, $C_{m-2}^m$ conjuntos com dois elementos de $A$, e assim sucessivamente, até $C_0^m = 1$ conjunto igual a $A$ de $m$ elementos. Logo,

$$n(\mathcal{P}(A)) = C_m^m + C_{m-1}^m + C_{m-2}^m + \ldots + C_0^m = 2^m.$$

b) Como $n(A) = 2$, então,

$$\begin{cases} n(\mathcal{P}^1(A)) = 2^2 = 4 \\ n(\mathcal{P}^2(A)) = n(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))) = 2^4 = 16 \\ n(\mathcal{P}^3(A)) = n(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))) = 2^{16} = 65.536 \end{cases}$$

de modo que $k = 3$ é o menor inteiro tal que $n(\mathcal{P}^k(A)) > 65.000$.

**Problema 02:** Existem apenas 3 resultados, de um total de 36, em que a soma dos dois dados é menor do que 4: (1;1), (1;2) e (2;1). Logo, a probabilidade de se tirar uma bola verde é igual a

$$P(\text{verde}) = \frac{3}{36} \times \frac{5}{8} + \frac{33}{36} \times \frac{3}{5} = \frac{289}{480}.$$

**Problema 03:** Naturalmente, devemos ter $|x| \leq 1$. Assim, denotando $x = \cos\theta$, tem-se $\sqrt{1 - x^2} = \operatorname{sen}\theta$, de modo que a desigualdade do enunciado se torna

$$\operatorname{sen}\theta - \cos\theta \geq a \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) \geq a \Rightarrow \sqrt{2}\cos(\theta + 45^\circ) \geq a.$$

Assim, para todo $a < \sqrt{2}$, existe $\theta$ tal que $\sqrt{2}\cos(\theta + 45^\circ) \geq a$, que corresponde a uma solução do tipo $x = \cos\theta$ para a desigualdade inicial.

**Problema 04:** Usando a notação em coordenadas polares, então $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ e a expressão $E$ desejada é igual a

$$E = |z|\left(\frac{z^{60} - 1}{z - 1}\right) = |z|\frac{\left|e^{i15\pi} - 1\right|}{\left|e^{i\frac{\pi}{4}} - 1\right|} = \frac{|-1-1|}{\left|e^{i\frac{\pi}{8}}\right|\left|e^{i\frac{\pi}{8}} - e^{-i\frac{\pi}{8}}\right|} = \frac{2}{\left|2i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right|} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}},$$

de modo que

$$E = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

**Problema 05:** Tirando o logaritmo na base $b$ da expressão, têm-se

$$\begin{aligned}
&\log_b 2 \log_b 2x = \log_b 3 \log_b 3x \\
\Rightarrow\ &\log_b^2 2 + \log_b 2 \log_b x = \log_b^2 3 + \log_b 3 \log_b x \\
\Rightarrow\ &\log_b x = \frac{\log_b^2 3 - \log_b^2 2}{\log_b 2 - \log_b 3} = -(\log_b 3 + \log_b 2) = -\log_b 6 \\
\Rightarrow\ &x = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

**Problema 06:** Seja $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + d$. Para que $p(x)$ tenha raiz dupla $x = r$, devemos ter $p'(r) = 0$, ou seja

$$3r^2 + 6r - 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 24}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3}.$$

Assim, para que haja uma raiz dupla no intervalo $]0, 1[$, devemos ter

$$\begin{aligned}
&p(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}) = 0 \\
\Rightarrow\ &\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3 + 3\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 - 2\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right) + d = 0 \\
\Rightarrow\ &(-1)^3 + 3(-1)^2 \frac{\sqrt{15}}{3} + 3(-1)\frac{15}{9} + \frac{15\sqrt{15}}{27} + 3 - 2\sqrt{15} + 5 + 2 - \frac{2\sqrt{15}}{3} + d = 0 \\
\Rightarrow\ &4 - \frac{10\sqrt{15}}{9} + d = 0 \\
\Rightarrow\ &d = \frac{10\sqrt{15}}{9} - 4.
\end{aligned}$$

**Problema 07:** Usando transformações em produto, a equação do enunciado é equivalente a

$$\begin{aligned}
&2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + \operatorname{sen} 3[180° - (\alpha + \beta)] = 0 \\
\Rightarrow\ &2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + \operatorname{sen}(3\alpha + 3\beta) = 0 \\
\Rightarrow\ &2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) = 0 \\
\Rightarrow\ &2\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\right] = 0 \\
\Rightarrow\ &4\operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right)\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, devemos ter

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)=0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{3\alpha}{2}=0 \\ \text{ou} \\ \cos\frac{3\beta}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3\alpha+3\beta}{2}=270^\circ \\ \text{ou} \\ \frac{3\alpha}{2}=90^\circ \\ \text{ou} \\ \frac{3\beta}{2}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=120^\circ \Rightarrow \gamma=60^\circ \\ \text{ou} \\ \alpha=60^\circ \\ \text{ou} \\ \beta=60^\circ \end{cases}.$$

**Problema 08:** Seja $A$ diagonal denotada por

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

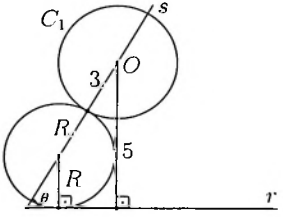
Como $A^{-1}=A^t$, então devemos ter

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11}^2=a_{22}^2=a_{33}^2=1.$$

Logo,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

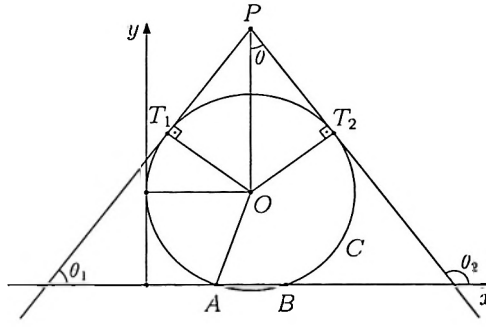
**Problema 09:**




Da figura acima, onde $\theta=60^\circ$,

$$\frac{R}{\operatorname{sen}\theta}+R+3=\frac{5}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow (2\sqrt{3}+3)R=10\sqrt{3}-9 \Rightarrow R=(29-16\sqrt{3})\text{ cm}.$$

**Problema 10:**




a) Por simetria, $C$ tem raio $R = 3$ e centro no ponto $O = (3, y_0)$ tal que

$$OA^2 = 9 \Rightarrow 1 + y_0^2 = 8 \Rightarrow y_0 = 2\sqrt{2}.$$

Logo, $C$ é descrita por

$$(x-3)^2 + (y-2\sqrt{2})^2 = 9.$$

b) Os pontos de tangência $T_1$ e $T_2$ são tais que $PT_1 = PT_2 = \sqrt{PO^2 - R^2} = 4$. Logo, as retas tangentes têm coeficientes angulares

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{PT_1}{R} = \frac{4}{3} \\ \operatorname{tg}\theta_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = -\frac{PT_2}{R} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

e, como essas retas passam por $P$, suas equações são dadas por

$$5 + 2\sqrt{2} = \pm 4 + b \Rightarrow \begin{cases} y = +\frac{4}{3}x + 1 + 2\sqrt{2} \\ y = -\frac{4}{3}x + 9 + 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

## II.11 Vestibular 2003

**Questão 01 (A):**

- Lembrando que $\overline{x \pm y} = \overline{x} \pm \overline{y}$, $\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}$ e, para $y \neq 0$, $\overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$, então a afirmação I é verdadeira;
- Lembrando que, $|xy| = |x|\,|y|$ e, para $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, então, pela desigualdade triangular, têm-se

$$|w| = \frac{|2iz + 3i + 3|}{\sqrt{5}|z|} \leq \frac{|2iz| + |3 + 3i|}{\sqrt{5}|z|} = \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}.$$

  e assim a afirmação II é verdadeira;
- Lembrando que $\arg(xy) = \arg(x) + \arg(y)$ e, para $y \neq 0$, $\arg\left(\frac{x}{y}\right) = \arg(x) - \arg(y)$, então

$$\arg(w) = \arg(1 + i) + 2\arg(z) - \arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{4} + 2\arg(z) - \frac{\pi}{3}.$$

  de modo que $\arg(w) = \frac{\pi}{12} + 2\arg(z)$, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 02 (D):** Seja $r$ a razão da progressão aritmética. Assim,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen} 15^\circ + 4r \\
\Rightarrow\ &\operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) + 4r \\
\Rightarrow\ &\operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ + 4r \\
\Rightarrow\ &2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 4r \\
\Rightarrow\ &r = \frac{\sqrt{2}}{8}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$y^2 - xz = y^2 - (y - r)(y + r) = r^2 = \frac{1}{32}.$$

**Questão 03 (C):** Simplificando,

$$f(x) = 3^{\frac{x-4}{x}+\frac{2(2x+1)}{2x}} - 3^{\frac{4x+5}{x}} + 1 = 3^{\frac{x^2+4x+4}{2x}} - 3^{\frac{4x+5}{x}} + 1.$$

Para que a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tenha raiz dupla, devemos ter

$$\begin{aligned} 2^2 - 4f(x) = 0 \Rightarrow f(x) &= 1 \\ \Rightarrow 3^{\frac{x^2+4x+4}{2x}} - 3^{\frac{4x+5}{x}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{x^2+2x+2}{2x} &= \frac{2x+5}{x} \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} &= -2 \text{ ou } 4, \end{aligned}$$

cuja soma é igual a 2.

**Questão 04 (A):**

- Assuma que existe $x = x_0$ tal que $f(x_0) = 0$. Logo, $f(x + x_0) = f(x)f(x_0) = 0$, para todo $x$. Nesse caso, $f(x)$ seria constante, o que viola uma condição do problema, de modo que $f(x) \neq 0$.

  Usando $y = x$, tem-se $f(x + x) = f(2x) = f^2(x)$, de modo que $f(2x)$ é estritamente positiva para todo valor de $2x$, e a afirmação I é verdadeira;

- Se $n = 1$, trivialmente $f(x) = f^1(x)$. Além disso, assumindo que a relação é válida para $(n-1)$, tem-se $f((n-1)x) = [f(x)]^{n-1}$, e assim

  $$f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x)f(x) = [f(x)]^{n-1}f(x) = [f(x)]^n.$$

  de modo que, por indução finita, a afirmação II é verdadeira;

- Usando $y = 0$, tem-se $f(x + 0) = f(x)f(0)$, e assim $f(0) = 1$. Usando $y = -x$, tem-se $f(x - x) = f(0) = f(x)f(-x) = 1$. Lembrando que $f(x) > 0$ (da afirmação I), então a única possibilidade da função ser par, isto é, ser tal que $f(-x) = f(x)$ para todo $x$, é ter $f(x) = 1$ constante para todo $x$, o que viola uma condição do enunciado. Logo, existe pelo menos um valor $x = x_1$ tal que $f(x_1) \neq 1$ e assim $f(-x_1) = \frac{1}{f(x_1)} \neq f(x_1)$, de modo que a função não é par e a afirmação III é falsa.

**Questão 05 (C):** Como $q \neq -2$, pois $q > 0$, então

$$P(-\frac{1}{2}) = (-1)\left[\frac{(-\frac{q}{2})^n - 1}{-\frac{q}{2} - 1}\right] = 0 \Rightarrow (-\frac{q}{2})^n = 1 \Rightarrow q = 2$$

e $n$ é par. Logo,

$$P(2) = 4\left(\frac{4^n - 1}{4 - 1}\right) = 5460 \Rightarrow 4^n = 4096 = 4^6 \Rightarrow n = 6.$$

de modo que

$$\frac{n^2 - q^3}{q^4} = \frac{36 - 8}{16} = \frac{7}{4}.$$

**Questão 06 (E):** Fazendo as divisões polinomiais, têm-se

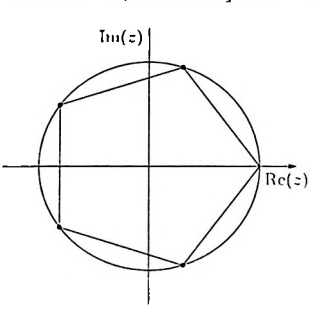
$$\begin{cases} P(x) = q_1(x)(x-1) + 2 \\ P(x) = q_2(x)(x+1) + 3 \\ P(x) = q_3(x)(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(1) = 1 + a + b + c + 1 = 2 \\ P(-1) = -1 + a + b - c + 1 = 3 \\ P(2) = 32 + 16a + 4b + 2c + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -3,\ b = \frac{9}{2} \text{ e } c = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c} = 9.$$

**Questão 07 (D):**

- A equação pode ser escrita como $\frac{z^5-1}{z-1}$, cujas raízes estão sobre o círculo de raio unitário no plano complexo, e correspondem aos vértices de um pentágono regular, a menos do vértice em $z = 1$, como indicado na figura abaixo. Dessa forma, as afirmações I e II são falsas;



- Como $|r| = 1$, então

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{3}\right|^k = \frac{1}{3}\left(\frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{3} - 1}\right) = \frac{3^n - 1}{2 \times 3^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} < \frac{1}{2},$$

e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 08 (B):** Seja $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x + k$. As possíveis raízes duplas de $p(x)$ são as raízes de

$$p'(x) = 6x^2 + 14x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 96}}{12} = -2 \text{ ou } -\frac{1}{3}.$$

Como a raiz dupla $x_1$ é inteira, então devemos ter $x_1 = -2$, de modo que

$$P(2) = -16 + 28 - 8 + k = 0 \Rightarrow k = -4,$$

e assim

$$p(x) = (x^2 + 4x + 4)(2x - 1) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow (k + x_1)x_2 = (-4 - 2)\frac{1}{2} = -3.$$

**Questão 09 (A):** Pela definição,

$$S = \{(18, 0); (17, 1); (16, 2); \ldots; (1, 17); (0, 18)\}.$$

Com isso, a soma desejada é igual a

$$\sum_{(a,b) \in S} \frac{18!}{a!\,b!} = \sum_{a=0}^{18} C_a^{18} = 2^{18} = 8^6.$$

**Questão 10 (C):** Decompondo 17640 em fatores primos, tem-se $17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$. Assim, um divisor de 17640 múltiplo de 3 pode ter o fator 3 com expoentes 1 ou 2. Além disso, há quatro expoentes possíveis (0, 1, 2 ou 3) para o fator 2, dois (0 ou 1) para o fator 5 e três (0, 1 ou 2) para o fator 7. Logo, considerando apenas os divisores positivos, o número de divisores de 17640 múltiplos de 3 é igual a $2 \times 4 \times 2 \times 3 = 48$.

**Questão 11 (D):**

- Pela definição, $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, que é inversível, já que $A$ e $P$ são inversíveis.

  Além disso, para toda matriz inversível $X$, tem-se $(X^t)^{-1} = (X^{-1})^t$. Para provar isso, considere $C = (X^t)^{-1}$, de modo que $C$ é a única matriz tal que $CX^t = X^tC = I$. Vamos mostrar, porém, que essa relação também é válida para $D = (X^{-1})^t$, isto é,

$$\begin{cases} (X^{-1})^t X^t = (XX^{-1})^t = I^t = I \\ X^t(X^{-1})^t = (X^{-1}X)^t = I^t = I \end{cases} \Rightarrow C = D.$$

  e assim a afirmação I é verdadeira;

- Pela definição,

$$\begin{aligned} A = PBP^{-1} &\Rightarrow A^t = (PBP^{-1})^t = (P^{-1})^t B^t P^t = (P^t)^{-1} B^t P^t \\ &\Rightarrow PBP^{-1} = (P^t)^{-1} B^t P^t \\ &\Rightarrow B = [P^{-1}(P^t)^{-1}]B^t[P^tP] = [P^tP]^{-1}B^t[P^tP]. \end{aligned}$$

  Assim, não necessariamente $B$ é simétrica se $A$ é simétrica, e a afirmação II é falsa;

- Da propriedade de determinantes,

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] \\ &= \det(P^{-1}) \times \det(A - \lambda I) \times \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I), \end{aligned}$$

  e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 12 (A):** Da segunda equação $x = (\operatorname{sen} 2a - 2y + 5z)$. Substituindo esse valor nas outras duas equações, têm-se

$$\begin{cases} 9y - 26z = \cos 3a + 4 \operatorname{sen} 2a \\ -9y + 26z = -2 \cos a - 6 \operatorname{sen} 2a \end{cases}$$

Assim, para $\cos a \neq 0$ de modo a evitar a solução homogênea, devemos ter

$$\begin{aligned} & \cos 3a + 4 \operatorname{sen} 2a = -(-2 \cos a - 6 \operatorname{sen} 2a) \\ \Rightarrow\ & (4 \cos^3 a - 3 \cos a) - 2 \operatorname{sen} 2a - 2 \cos a = 0 \\ \Rightarrow\ & (4 \cos^2 a - 4 \operatorname{sen} a - 5) \cos a = 0 \\ \Rightarrow\ & 4(1 - \operatorname{sen}^2 a) - 4 \operatorname{sen} a - 5 = 0 \\ \Rightarrow\ & 4 \operatorname{sen}^2 a + 4 \operatorname{sen} a + 1 = 0 \\ \Rightarrow\ & (2 \operatorname{sen} a + 1)^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & \operatorname{sen} a = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow\ & a = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

**Questão 13 (B):** Seja $E$ a expressão dada. Logo,

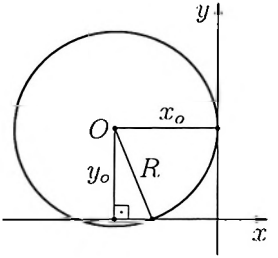
$$\begin{aligned} E &= 2^{-2} \operatorname{sen} 4x (\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} x) \\ &= 2^{-3} \operatorname{sen} 4x (\cos 3x - \cos 5x) \\ &= 2^{-3} (\operatorname{sen} 4x \cos 3x - \operatorname{sen} 4x \cos 5x) \\ &= 2^{-4} [\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} x - (\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} (-x))] \\ &= 2^{-4} (2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} 9x). \end{aligned}$$

**Questão 14 (E):** Como $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$, para qualquer valor de $\alpha$, então,

$$\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x = \alpha + (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

de modo que $f(x)$ é uma função par, constante, não injetora e não sobrejetora.

**Questão 15 (C):**

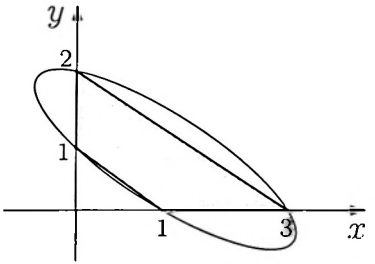



O lugar geométrico do centro $O = (x_o, y_o)$ das circunferências é caracterizado por

$$\begin{cases} x_o = -R \\ y_o^2 = R^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow y_o^2 = x_o^2 - 4.$$

o que caracteriza uma hipérbole.

**Questão 16 (B):**



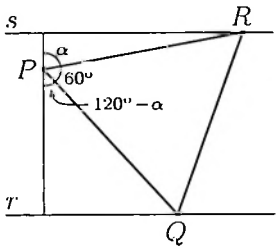

A equação do enunciado caracteriza uma elipse rotacionada que intercepta os eixos cartesianos nos pontos

$$\begin{cases} y = 0 : 3x^2 - 9x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 1 \\ x = 0 : 2y^2 - 8y + 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ ou } y = 1 \end{cases}$$

que formam um polígono de área

$$S = \frac{3 \times 2}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = \frac{5}{2}.$$

**Questão 17 (B):**




Das condições do problema,

$$\ell \cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\ell} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{\ell^2 - 1}}{\ell},$$

e ainda

$$\begin{aligned} \ell\cos(120^\circ - \alpha) = 4 &\Rightarrow \ell(\cos 120^\circ \cos\alpha + \operatorname{sen} 120^\circ \operatorname{sen}\alpha) = 4 \\ &\Rightarrow \ell\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\ell} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{\ell^2-1}}{\ell}\right) = \frac{\sqrt{3(\ell^2-1)} - 1}{2} = 4 \\ &\Rightarrow \ell^2 = 28. \end{aligned}$$

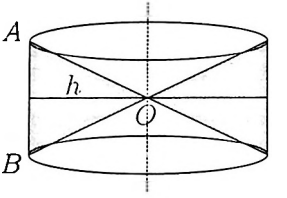
de modo que a área do triângulo $\triangle PQR$ é igual a

$$S_{PQR} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

**Questão 18 (D):** Observando que $585 = 3^2 \times 5 \times 13$, então, por inspeção, os números de lados dos três polígonos são 5, 9 e 13. Assim, o número $N_d$ total de diagonais é igual a

$$N_d = \frac{5(5-3)}{2} + \frac{9(9-3)}{2} + \frac{13(13-3)}{2} = 5 + 27 + 65 = 97.$$

**Questão 19 (C):**



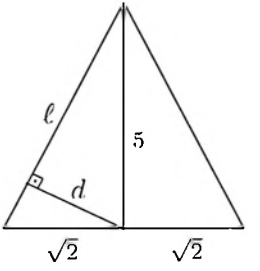

Seja $h$ a altura do triângulo relativa ao vértice $O$, de modo que

$$h = \sqrt{(\sqrt{2}R)^2 - R^2} = R.$$

O sólido obtido consiste em um cilindro de raio da base $h$ e altura $AB = 2R$ subtraído de dois cones de mesmo raio da base $h$ e altura $\frac{AB}{2} = R$ cada um. Assim, o volume $V$ desse sólido é igual a

$$V = \pi h^2 \times AB - 2 \times \frac{\pi h^2 \frac{AB}{2}}{3} = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

**Questão 20 (B):**




Usando a notação da figura acima, por Pitágoras, têm-se

$$\ell = \sqrt{(5)^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{5\sqrt{2}}{\ell} = \frac{5\sqrt{6}}{9} \text{ cm}.$$

**Problema 01:**

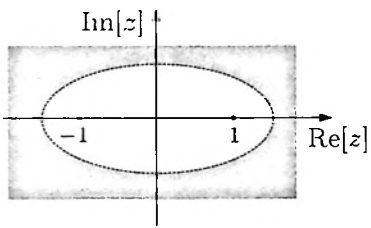
a) Escrevendo $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$, se $A \cap B = \emptyset$, então $B = B \cap A^C$, de modo que $B \subset A^C$.

b) Escrevendo $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$, onde $(B \cap A)$ e $(B \cap A^C)$ são disjuntos, e ainda $B = (B \setminus A) \cup (B \setminus A^C)$, com $(B \setminus A)$ e $(B \setminus A^C)$ disjuntos, e observando que $B \setminus A = B \cap A^C$, já que estes dois subconjuntos incluem os elementos de $B$ não pertencentes a $A$, então, $B \setminus A^C = B \cap A$.

**Problema 02:** Como $(z + \overline{z} + 2)$ é real, então para que $w$ seja real, basta ter

$$|z - 1| + |z + 1| - 3 > 0,$$

o que corresponde à região estritamente externa de uma elipse no plano complexo com focos em $z = 1$ e $z = -1$, distância focal $2c = 2$, semi-eixo maior de comprimento $2a = 3$ e semi-eixo menor de comprimento $2b = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, como esboçado abaixo.




**Problema 03:** Do enunciado,

$$t_1 = \frac{d_1}{v_A} \Rightarrow d_2 = d_1 + t_1 v_T = d_1 + \frac{d_1 v_T}{v_A}.$$

$$t_2 = \frac{d_2 - d_1}{v_A} = \frac{d_1 v_T}{v_A^2} \Rightarrow d_3 = d_2 + t_2 v_T = d_2 + \frac{d_1 v_T^2}{v_A^2}.$$

$$t_3 = \frac{d_3 - d_2}{v_A} = \frac{d_1 v_T^2}{v_A^3} \Rightarrow d_4 = d_3 + t_3 v_T = d_3 + \frac{d_1 v_T^3}{v_A^3}.$$

e assim sucessivamente, de modo que

$$t_k = \frac{d_1 v_T^{k-1}}{v_A^k} \Rightarrow \Delta T = \sum_{k=1}^{\infty} t_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_1 v_T^{k-1}}{v_A^k} = \frac{d_1}{v_A} \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}} = \frac{d_1}{v_A - v_T}.$$

Assim, o intervalo total de tempo $\Delta T$ que Aquiles leva para alcançar a tartaruga é finito e igual à distância inicial $d_1$ dividida pela velocidade relativa entre Aquiles e a tartaruga.

**Problema 04:** Inicialmente, fazendo $x = y = \pm 1$, têm-se

$$\begin{cases} f(1.1) = f(1) + f(1) = 2f(1) \\ f((-1).(-1)) = f(-1) + f(-1) = 2f(-1) \end{cases} \Rightarrow f(1) = f(-1) = 0.$$

Considerando, agora, $y = -1$,

$$f(x.(-1)) = f(-x) = f(x) + f(-1) = f(x).$$

de modo que $f(x)$ é uma função par.

**Problema 05:** Dividindo os polinômios dados, podemos escrever

$$P_1(x) = P_2(x)(x^2 - 2x + a) + [(8 - 2a)x + (b - 4a)]$$
$$P_3(x) = P_4(x)[x + (c + 1)] + [(d + c - 1)x - (2c + 5)].$$

Assim, como $P_1(x)$ é divisível por $P_2(x)$ e $P_3(x)$ dividido por $P_1(x)$ gera resto $-5$, então

$$\begin{cases} (8 - 2a)x + (b - 4a) = 0 \\ d + c - 1 = 0 \\ 2c + 5 = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = 4a = 16, c = 0 \text{ e } d = 1.$$

de modo que

$$a + b + c + d = 4 + 16 + 0 + 1 = 21.$$

**Problema 06:** Quando dividimos uma coluna de uma matriz por um número real não nulo, o determinante da matriz fica dividido pelo mesmo valor. Assim, dividindo a primeira coluna da matriz por $abcd \neq 0$, o determinante $D$ desejado é dado por

$$D = abcd \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{b} & 1 & b & b^2 \\ \frac{1}{c} & 1 & c & c^2 \\ \frac{1}{d} & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a primeira linha por $a$, a segunda por $b$, a terceira por $c$ e a quarta por $d$, tem-se

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix},$$

que corresponde ao determinante de uma matriz de Vandermonde na forma tradicional, e assim, $D = (b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - c)$.

**Problema 07:** Tirando a tangente de ambos os lados da equação, têm-se

$$\frac{\operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)\right]+\operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)\right]}{1-\operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)\right]\operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)\right]}=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)+\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)}{1-\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)}=\operatorname{tg}\alpha$$

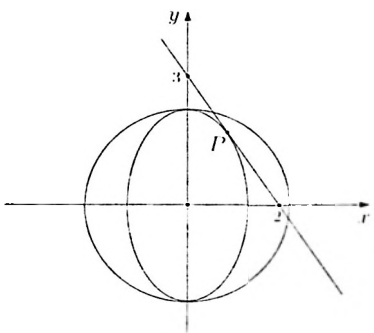
$$\Rightarrow \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)+\frac{e^{2x}}{4}}=\operatorname{tg}\alpha$$

$$\Rightarrow e^{2x}=8(\sqrt{2}-1)(\operatorname{cotg}\alpha-1).$$

Assim, devemos ter

$$8(\sqrt{2}-1)(\operatorname{cotg}\alpha-1)>0\Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha>1\Rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{4}.$$

**Problema 08:**



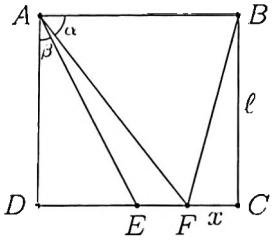

Pela inclinação da reta $3x+2y=6$, podemos perceber que os focos da elipse estão sobre o eixo $y$, de modo que $b^2-5$ e $b>a$. Logo, o ponto $P$ é raiz dupla da equação

$$\begin{cases}\frac{x_p^2}{a^2}+\frac{y_p^2}{5}=1\\ 3x_p+2y_p=6\end{cases}\Rightarrow \frac{x_p^2}{a^2}+\frac{\frac{9(2-x_p)^2}{4}}{5}=1\Rightarrow (20+9a^2)x_p^2-36a^2x_p+16a^2=0.$$

e assim

$$(36a^2)^2=4(20+9a^2)(16a^2)\Rightarrow a^2=\frac{16}{9}\Rightarrow\begin{cases}x_p=\frac{36a^2}{2(20+9a^2)}=\frac{64}{72}=\frac{8}{9}\\ y_p=\frac{6-3x_p}{2}=\frac{5}{3}\end{cases}.$$

**Problema 09:**




Considerando $CF = x$, têm-se

$$AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{\ell^2 + (\ell - x)^2},$$

e assim,

$$\ell + x = \sqrt{\ell^2 + (\ell - x)^2} \Rightarrow \ell^2 + 2\ell x + x^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell x + x^2 \Rightarrow x = \frac{\ell}{4},$$

de modo que

$$\begin{cases} DF = \frac{\ell}{4} \\ BF = \sqrt{\ell^2 + x^2} = \frac{\ell\sqrt{17}}{4} \\ AF = \sqrt{\ell^2 + (\ell - x)^2} = \frac{5\ell}{4} \end{cases}$$

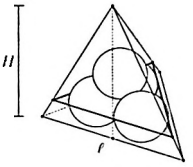
Logo, aplicando a lei dos cossenos no triângulo $\Delta ABF$, tem-se

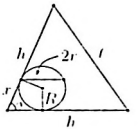
$$BF^2 = AF^2 + AB^2 - 2AF \times AB\cos\alpha \Rightarrow \frac{17\ell^2}{16} = \frac{25\ell^2}{16} + \frac{16\ell^2}{16} - \frac{40\ell^2}{16}\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

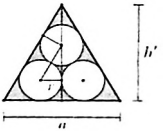
Já, para o ângulo $\beta$, tem-se $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \frac{\ell\sqrt{5}}{2}$, e assim,

$$\cos\beta = \frac{AD}{AE} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = (2\cos^2\beta - 1) = \frac{3}{5}.$$

**Problema 10:**




Seja um tetraedro regular de aresta $\ell$, tal que a altura de uma face é igual a $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Com isso, a área da base $S_b$, a altura $H$ e o volume $V$ desse tetraedro são dados por

$$\begin{cases} S_b = \frac{\ell \times h}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \\ H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{h}{3}\right)^2} = \frac{2h\sqrt{2}}{3} = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow V = \frac{S_b \times H}{3} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}.$$

Aplicando-se a lei dos cossenos na vista lateral do tetraedro, representada na figura central acima, tem-se

$$\ell^2 = h^2 + h^2 - 2h^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{\ell^2}{2h^2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

e assim $r = R\,\text{sen}\,\alpha = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$.

No nosso problema, existe um plano paralelo à base do tetraedro que secciona três das esferas como indicado na figura à direita acima, onde cada círculo tem raio $r$. Neste caso, o lado $a$ do triângulo-seção é tal que

$$h' = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{\text{sen}\,30^\circ} + 2r\cos 30^\circ - r = r(2 + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow a = 2r(3 + 2\sqrt{3}) = \frac{4R(3\sqrt{2} + 2\sqrt{6})}{3}.$$

Esse plano está a uma distância $x$ de uma aresta da base, onde

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{x} \Rightarrow x = R\sqrt{2}.$$

Dessa forma, a aresta $\ell$ do tetraedro é tal que

$$\frac{a}{h - x} = \frac{\ell}{h} \Rightarrow 2R\ell(\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) = \ell\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2} - R\sqrt{2}\right) \Rightarrow \ell = \frac{2R(6\sqrt{2} - 5\sqrt{6})}{3},$$

de modo que

$$V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8R^3(6\sqrt{2} + 5\sqrt{6})^3\sqrt{2}}{27 \times 12} = \frac{8R^3(522 + 305\sqrt{3})}{27}.$$

## II.12 Vestibular 2002

**Questão 01 (D):** Lembrando que $x$ e $y$ são positivos:

- Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 > 14$ e $-2y > -4$, de modo que $x^2 - 2y > 12$, e a afirmação I é verdadeira;
- Se $y = x = 1$, então $x^2 - 2y = -1 < 12$, e a afirmação II é falsa;
- Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $y > \sqrt{2}$ e $-2y < -2\sqrt{2}$, de modo que $x^2 - 2y < (1 - 2\sqrt{2}) < 0$, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 02 (E):** Se $f(x)$ é par, então, para $-c < x < c$, devemos ter

$$\begin{aligned}\frac{ax+b}{x+c} = \frac{-ax+b}{-x+c} &\Rightarrow (ax+b)(-x+c) = (-ax+b)(x+c)\\ &\Rightarrow 2(acx - bx) = 0\\ &\Rightarrow b = ac,\end{aligned}$$

de modo que

$$f(x) = \frac{a(x+c)}{x+c} = a.$$

**Questão 03 (E):** O domínio da função $f(x)$ é tal que

$$5 - ||2x-1| - 6| \geq 0 \Rightarrow 5 \geq ||2x-1| - 6| \Rightarrow -5 \leq |2x-1| - 6 \leq 5,$$

de modo que

$$\begin{cases} |2x-1| \geq 1 \\ |2x-1| \leq 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ -5 \leq x \leq 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 0 \\ \text{ou} \\ 1 \leq x \leq 6 \end{cases}.$$

**Questão 04 (D):** Resolvendo a equação, têm-se

$$z^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{6}},$$

ou seja,

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right).$$

de modo que um possível valor para a soma de duas raízes, dentre as opções indicadas, é $-i$.

**Questão 05 (B):** Como $n(A \cup B) = 12$ e $n(A) = 8$, então $n(B \setminus A) = 4$, de modo que $n(\mathcal{P}(B \setminus A)) = 2^4 = 16$, já incluindo o conjunto vazio $\emptyset$.

**Questão 06 (D):** Os valores mínimos de $f(x)$ e $g(x)$ são tais que

$$\begin{cases} f_{\min} = (\sqrt{2})^{3(-1)-1} = \frac{1}{4} \\ g_{\min} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3(1)-1} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow f_{\min} + g_{\min} = \frac{1}{2}.$$

**Questão 07 (B):** A função $f(x)$ mapeia $x$ num conjunto $I$ de valores $y$ tais que $\operatorname{sen} y < x$. Com isso, para qualquer subconjunto de $x > 1$ é possível garantir que $\operatorname{sen} y < x$, para todo número real $y$, de modo a termos $I = \mathbb{R}$.

**Questão 08 (A):** Do enunciado,

$$f(x) = q(x)(x-1)(x-2) + (x+1) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = q(x)(x-1)(x-2) + (x-1) + 2 \\ f(x) = q(x)(x-1)(x-2) + (x-2) + 3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 3$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 13.$$

**Questão 09 (X):** Por Girard,

$$\begin{cases} a + b + c = p \\ ab + bc + ac = 0 \\ abc = q^m \end{cases}.$$

de modo que

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = p^2.$$

e assim a expressão $E$ desejada é igual a

$$E = \log_q \left[q^m (p^2)^p\right] = \log_q q^m + \log_q p^{2p} = m + 2p \log_q p.$$

**sIn:** Os dados da questão são inconsistentes, pois não é possível ter $(ab + bc + ac) = 0$ com $a, b, c > 0$.

**Questão 10 (D):** Como $\ln \frac{2}{3} < 0$, a função tem concavidade para baixo. Calculando o discriminante $\Delta$ da função, têm-se

$$\Delta = \ln^2 6 + \ln \frac{2}{3} \ln \frac{3}{2} = \left(\ln 6 - \ln \frac{3}{2}\right)\left(\ln 6 + \ln \frac{3}{2}\right) = (\ln 4)(\ln 9) = 4(\ln 2)(\ln 3).$$

de modo que $\Delta > 0$ e a função possui duas raízes reais distintas, cuja média é $m = -\frac{\ln 6}{2 \ln \frac{2}{3}}$. Logo, o valor máximo dessa função é dado por

$$\begin{aligned} f(m) &= \left(-\frac{\ln 6}{2 \ln \frac{2}{3}}\right)^2 \ln \frac{2}{3} + \left(-\frac{\ln 6}{2 \ln \frac{2}{3}}\right) \ln 6 - \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} \\ &= \frac{\ln^2 6}{4 \ln \frac{2}{3}} - \frac{\ln^2 6}{2 \ln \frac{2}{3}} - \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} \\ &= -\frac{\ln^2 6}{4 \ln \frac{2}{3}} - \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\ln^2 6 + \ln \frac{3}{2} \ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{2}{3}}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\ln \frac{2}{3}}\right) \\ &= \frac{(\ln 2)(\ln 3)}{\ln 3 - \ln 2}. \end{aligned}$$

**Questão 11 (D):** O número $N_c$ de combinações dos símbolos escolhidos para compor o anagrama é igual a

$$N_c = C_2^3 \times C_2^7 = 3 \times 21 = 63.$$

de modo que o número total de anagramas, que é o número $N_p$ de permutações dos 4 símbolos previamente escolhidos, é dado por

$$N_p = N_c \times 4! = 63 \times 24 = 1512.$$

**Questão 12 (E):** Como Rubinho não conseguiu ultrapassar David muito perto da chegada, conclui-se que Rubinho chegou imediatamente atrás de David, preservando a ordem que havia entre eles logo após a largada. Dessa forma, Ralf chegou em primeiro ou em terceiro. Como o número de total de ultrapassagens envolvendo as três primeiras posições é ímpar e David e Rubinho preservaram a ordem, então Ralf mudou de posição um número ímpar de vezes. Logo, Ralf deveria ter chegado em segundo, indicando que os dados divulgados pela revista são inconsistentes.

**Questão 13 (E):** Como $\cos(90^\circ - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, então o determinante $D$ dado é igual a

$$D = \cos 25^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 65^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 25^\circ - \operatorname{sen} 65^\circ) = 0.$$

**Questão 14 (D):** Das propriedades das matrizes $A$ e $B$, têm-se

$$\begin{cases} A(BA) = A(B) = A \\ (AB)A = (A)A \\ B(AB) = B(A) = B \\ (BA)B = (B)B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA = A \\ BB = B \end{cases}$$

e assim

$$\begin{aligned} [(A+B)^t]^2 &= A^tA^t + A^tB^t + B^tA^t + B^tB^t \\ &= (AA)^t + (BA)^t + (AB)^t + (BB)^t \\ &= A^t + B^t + A^t + B^t \\ &= 2(A^t + B^t). \end{aligned}$$

**Questão 15 (A):** Supondo $a \neq 0$, então podemos escrever $V = -\frac{b}{a}W$, e assim

$$A\left(-\frac{b}{a}W\right) = \alpha\left(-\frac{b}{a}W\right) \Rightarrow bAW = \alpha bW \Rightarrow bBW = \alpha bW \Rightarrow b = 0.$$

pois $\alpha \neq \beta$ e $W$ é não nulo. Dessa forma, $aV + bW = aV = 0$, o que é absurdo, pois $V$ é não nulo e, por hipótese, $a \neq 0$. Logo, a hipótese deve ser falsa, de modo que, necessariamente, $a = 0$.

Um raciocínio inteiramente análogo nos faz concluir que $b = 0$, e assim $a + b = 0$.

**Questão 16 (A):** Pela lei dos senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R.$$

de modo que

$$2\pi R = \frac{20}{\operatorname{sen} 15^\circ} = \frac{20}{\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}} = \frac{40}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 40\sqrt{2+\sqrt{3}} = 20\sqrt{2}(1+\sqrt{3}).$$

**Questão 17 (B):** Seja o ponto $B = (x_0, 2x_0) \in r$. A reta $p$, perpendicular a $r$ e passando por $B$, é descrita por $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}x_0$, e sua interseção $C = (x_c, y_c)$ com $s$ é tal que

$$\begin{cases} y_c = \frac{1}{2}x_c \\ y_c = -\frac{1}{2}x_c + \frac{5}{2}x_0 \end{cases} \Rightarrow x_c = \frac{5}{2}x_0 \text{ e } y_c = \frac{5}{4}x_0.$$

Logo, a área do triângulo $\Delta OBC$ é dada por

$$\frac{OB \times BC}{2} = \frac{\sqrt{(x_0)^2 + (2x_0)^2} \times \sqrt{\left(\frac{5}{2}x_0 - x_0\right)^2 + \left(\frac{5}{4}x_0 - 2x_0\right)^2}}{2} = \frac{15}{8}x_0^2,$$

de modo que a distância do ponto $B$ ao eixo das ordenadas é tal que

$$\frac{15}{8}x_0^2 = 12 \times 10^{-1} \Rightarrow x_0 = \frac{4}{5}.$$

**Questão 18 (X):** Completando os quadrados na equação da elipse, têm-se

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + k\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1+k}{4} \Rightarrow \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{\frac{1+k}{4}} + \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{\frac{1+k}{4k}} = 1.$$

Se $k > 1$, a distância focal da elipse é igual a

$$2c = 2\sqrt{\frac{1+k}{4} - \frac{1+k}{4k}} = 2\sqrt{\frac{k^2 - 1}{4k}} = 2.$$

e assim

$$k^2 - 1 = 4k \Rightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow k = 2 + \sqrt{5}.$$

Se, porém, $0 < k < 1$, a distância focal é tal que

$$2c = 2\sqrt{\frac{1+k}{4k} - \frac{1+k}{4}} = 2\sqrt{\frac{1-k^2}{4k}} = 2.$$

e assim

$$1 - k^2 = 4k \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = -2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow k = -2 + \sqrt{5}.$$

Logo, a questão tem duas possíveis soluções.

**Questão 19 (A):** A região do enunciado é descrita por

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 \leq 16.$$

o que caracteriza um círculo de raio $r = 4$ e centro $(-2, 2)$ sobre a reta $y + x = 0$. Girando essa região em torno da reta $y + x = 0$, têm-se uma região de área externa composta por dois círculos de raio $r$ e ainda duas cunhas esféricas de raio $r$ subentendendo cada uma um ângulo $\frac{\pi}{6}$. Assim, a área externa total do sólido é igual a

$$2(\pi r^2) + 2\frac{(4\pi r^2)}{12} = 32\pi + \frac{32\pi}{3} = \frac{128\pi}{3}.$$

**Questão 20 (C):** A razão dos volumes das pirâmides obtida e original é o cubo da razão entre as suas alturas. Assim, para uma razão dos volumes igual a $\frac{1}{8}$, a razão das alturas deve ser $\frac{1}{2}$, de modo que a distância do plano ao vértice da pirâmide é $\frac{10}{2} = 5$ m.

**Problema 01:** Usando as propriedades básicas da função logaritmo, têm-se

$$\begin{aligned} & f(x) = 3(x-1)\log_3 2 + 2(1+2x-x^2)\log_3 2 - x(3x+1)\log_3 2 \leq 0 \\ \Rightarrow\ & -5x^2 + 6x - 1 \geq 0 \\ \Rightarrow\ & (x-1)(x-\frac{1}{5}) \leq 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{5} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

**Problema 02:** Para $x$ e $y$ reais positivos, têm-se

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2.$$

Com isso,

$$\left(\frac{x^2+y^2}{xy} + 2\right)^4 \geq (2+2)^4 = 256 > 70 = C_4^8.$$

**Problema 03:** Seja $r(x) = (ax - b)$ o resto da divisão do polinômio $f(x)$ por $(x - \frac{1}{2})(x - 1)$. Assim, podemos escrever

$$f(x) = q(x)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) + (ax - b).$$

Do gráfico da função, têm-se

$$\begin{cases} f(1) = a + b = 0 \\ f(\frac{1}{2}) = a\frac{1}{2} + b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \text{ e } b = \frac{1}{4} \Rightarrow r(x) = \frac{1}{4}(-x-1).$$

**Problema 04:** Sejam $a = m_a + in_a$ e $b = m_b + in_b$, com $m_a$, $n_a$, $m_b$ e $n_b$ reais. Do sistema dado, têm-se

$$\begin{cases} \overline{z}w = 3a + 4b \\ z\overline{w} = 3a - 4b \end{cases}.$$

e assim

$$\overline{3a + 4b} = 3a - 4b \Rightarrow 3m_a - 3in_a + 4m_b - 4in_b = 3m_a + 3in_a - 4m_b - 4in_b$$
$$\Rightarrow n_a = m_b = 0.$$

Com isso, $a = m_a$ e $b = in_b$, e como $a^2 + b^2 = 0$, então $m_a^2 = n_b^2$. Logo,

$$|zw| = |\overline{z}w| = |3a + 4b| = |3m_a - 4in_b| = |3m_a + 4im_a| = 5|m_a| = 1,$$

de modo que $|a| = |m_a| = \frac{1}{5}$.

**Problema 05:**

a) Adicionando $(A + I)$ a ambos os lados da equação do enunciado, têm-se

$$A^3 + 3A^2 + 3A + I = (A + I)^3 = A + I,$$

como era desejado demonstrar.

b) Sejam

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

tais que $B^3 = B$, $C^3 = C$ e $B + C = A$. Com isso,

$$B - C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

de modo que o sistema dado tem solução $[x, y] = [x_0, -x_0]$ não necessariamente nula.

**Problema 06:** Uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1$ e razão $r > 0$ é tal que $a_n > a_1 > 0$ e ainda

$$\frac{A_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A_n}{n} - a_n = \frac{a_1 - a_n}{2} < 0 \\ \frac{A_n}{n} + a_n = \frac{a_1 + 3a_n}{2} > 0 \end{cases}.$$

Com isso,

$$\begin{cases} E = \left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 = \left(\frac{a_1 - a_n}{2}\right)^2 > 0 \\ D = \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2 = \left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)\left(\frac{A_n}{n} + a_n\right) < 0 \end{cases}.$$

e assim $E > D$.

**Problema 07:** A soma $S$ dos $(n-1)$ arcos $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, \ldots, \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ é tal que

$$S = \pi \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right].$$

Assim, devemos ter

$$\overset{\frown}{A_nA_1} = 2\pi - S = 2\pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{2\pi}{512} \Rightarrow 2^{n-1} > 2^9 \Rightarrow n - 1 > 9 \Rightarrow n \geq 11.$$

**Problema 08:** Sejam $R$ e $g$ o raio da base e a geratriz do cone, respectivamente. Do enunciado,

$$m = \frac{\pi Rg}{\pi R^2} \Rightarrow g = mR.$$

e ainda

$$S = \pi R^2 + \pi Rg = \pi R^2 + \pi mR^2 = \pi R^2(1+m) \Rightarrow R^2 = \frac{S}{\pi(1+m)}.$$

de modo que

$$h = \sqrt{g^2 - R^2} = \sqrt{R^2(m^2-1)} = \sqrt{\frac{S(m^2-1)}{\pi(1+m)}} = \sqrt{\frac{S(m-1)}{\pi}}.$$

**Problema 09:** A reta suporte de $AC$ é descrita por $AC: y = \frac{\sqrt{a}}{a-h}x + \frac{h\sqrt{a}}{h-a}$, de modo que a reta tangente tem coeficiente angular $\alpha = \frac{h-a}{\sqrt{a}}$. O ponto $A$ é tal que $a$ é raiz dupla da equação

$$\begin{cases} (x-h)^2 + y^2 = r^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow (x-h)^2 - x = r^2 \Rightarrow x^2 + (1-2h)x + h^2 - r^2 = 0.$$

Logo,

$$a = -\frac{(1-2h)}{2} \Rightarrow h - a = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

como era desejado demonstrar.

**Problema 10:** Usando transformação em produto, têm-se

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{y+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y-z}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{y+z}{2}\right)\cos\left(\frac{y-z}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ - x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{180^\circ - x}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Assim, devemos ter

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 45^\circ \Rightarrow x = 90^\circ.$$

# II.13 Vestibular 2001

**Questão 01 (D):** Para que a equação $3y^2 - y + a = 0$ tenha raiz dupla, devemos ter

$$1 - 12a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{12}.$$

de modo que a solução da equação $3 \times 3^{2x} - 3^x + \frac{1}{12} = 0$ é tal que

$$3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = -\log_3 6.$$

**Questão 02 (B):** Sejam as raízes $r_1$, $r_2 = (r_1 + \frac{1}{2})$, $r_3 = (r_1 + 1)$ e $r_4 = (r_1 + \frac{3}{2})$, de modo que, por Girard, têm-se

$$4r_1 + 3 = 5 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow r_2 = 1, r_3 = \frac{3}{2} \text{ e } r_4 = 2.$$

e ainda

$$\begin{cases} r_1(r_2 + r_3 + r_4) + r_2(r_3 + r_4) + r_3 r_4 = \frac{35}{4} = \frac{a}{4} \\ r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{3}{2} = \frac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow a + b = 35 + 6 = 41.$$

**Questão 03 (C):** Lembrando que $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$ e que $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, então, do enunciado, têm-se

$$\begin{cases} \arg(z) = \frac{\pi}{3} \\ \arg(z) - \arg(w) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \arg(z) + \arg(w) = \frac{2\pi}{3}.$$

**Questão 04 (A):** Do enunciado, devemos ter

$$\frac{\frac{1 - 2\cos a + 2\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} 2a}}{\frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a \cos a}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow 1 - 2\cos a + 2\operatorname{sen} a = 2(1 - \cos a)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi}{6}.$$

**Questão 05 (A):** O primeiro triângulo é retângulo e tem área $\frac{4\times 3}{2} = 6$. Em cada passo, o lado do novo triângulo é metade do triângulo anterior, de modo que a área do novo triângulo é um quarto da área do triângulo anterior. Com isso, a soma $S_n$ das áreas dos $n$ primeiros triângulos é dada por

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 6\left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} = 6\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{4}}\right).$$

e assim

$$S_{78} \approx 8 \text{ cm}^2.$$

**Questão 06 (B):** A soma dos coeficientes do desenvolvimento do binômio é $2^m = 2^{10}$, e assim devemos ter $m = 10$. Logo, o número desejado de arranjos é $\frac{10!}{8!} = 90$.

**Questão 07 (E):** Desenvolvendo $b_n$, têm-se

$$b_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)\,n!\,\frac{n!}{n}} = \frac{n}{n+1}\,\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{n}{n+1}\,a_n.$$

de modo que

$$a_n - b_n = a_n - \frac{n}{n+1}\,a_n = \frac{1}{n+1}\,a_n.$$

**Questão 08 (E):**

- Seja $C = (AB - BA')$. Logo,

  $$C' = (AB + BA')' = (AB)' + (BA')' = B'A' + AB' = BA' + AB = C.$$

  e a afirmação I é verdadeira;
- Seja $D = (A + A' + B)$, de forma que

  $$D' = (A + A' + B)' = A' + A + B' = A' + A + B = D.$$

  e a afirmação II é verdadeira;
- Seja $E = ABA'$, de modo que

  $$E' = (ABA')' = AB'A' = ABA' = E.$$

  e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 09 (A):** Como $AA^{-1} = I$, então,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = I \Rightarrow x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} = 1.$$

**Questão 10 (C):** Do enunciado,

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0 &\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \cos 2\beta = \sqrt{2} - 1 = 2\cos^2 \beta - 1 \\ &\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \cos \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}. \end{aligned}$$

**Questão 11 (B):** Sejam o raio da base $r$, a geratriz $g$ e a altura $h$ do cone, tais que

$$\begin{cases} g^2 = (r^2 + h^2) \\ 2r = g + h \end{cases} \Rightarrow 4r^2 - 4rh + h^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow r = \frac{4h}{3} \Rightarrow g = \frac{5h}{3}.$$

Além disso,

$$\frac{r^2 h}{3} = 128 \Rightarrow \frac{16h^3}{27} = 128 \Rightarrow h = 6 \text{ cm e } r = 8 \text{ cm}.$$

**Questão 12 (B):** O número de diagonais de um polígono de $n$ lados é $\frac{n(n-3)}{2}$. Assim, seja $n$ o número de lados do polígono de mais lados. Do enunciado,

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-6)(n-9)}{2} + 39 \Rightarrow n^2 - 3n = n^2 - 15n + 54 + 78 \Rightarrow n = 11,$$

de modo que

$$n + (n-6) + \frac{n(n-3)}{2} + \frac{(n-6)(n-9)}{2} = 11 + 5 + \frac{11 \times 8}{2} + \frac{5 \times 2}{2} = 65.$$

**Questão 13 (E):** Do enunciado, devemos ter

$$\begin{aligned} (x-r)^2 + y^2 - 2(y+r)^2 = 3r^2 &\Rightarrow (x-r)^2 - y^2 - 4yr - 2r^2 = 3r^2 \\ &\Rightarrow (x-r)^2 - (y+2r) = r^2, \end{aligned}$$

que corresponde a uma hipérbole de centro $(r, -2r)$ e semi-eixos de comprimento $r$.

**Questão 14 (B):**

- Como $Y \cap (X \cup Y)^C = \emptyset$ e $(X^C \cap Y^C)^C = X \cup Y$, então a igualdade da primeira afirmação equivale a $X \cap [X \cup (X \cup Y)] = X$, ou seja, $X \cap (X \cup Y) = X$, e a afirmação I é verdadeira;
- Como $Z \subset X$, então $X \cup (Z^C \cap Y) = X \cup Y$ e assim $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)] = X \cup Y$, e a afirmação II é verdadeira;
- Se $(X \cup Y)^C \subset Z$, então $Z$ engloba todos os elementos de $\mathbb{R}$ que não estão nem em $X$ nem em $Y$. Porém, não podemos afirmar que $Z^C \subset X$, pois $Z^C$ pode ter um elemento em $Y$, e a afirmação III é falsa.

**Questão 15 (E):** Usando a desigualdade triangular, tem-se

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{1}{4}\left|f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\right) \\ &< \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

de modo que $|f(x)| < \frac{1}{4}$, para todo $0 < x < 1$. Repetindo o procedimento acima, usando essa nova propriedade, conclui-se, de modo inteiramente análogo, que $|f(x)| < \frac{1}{8}$, para todo $0 < x < 1$. Assim, repetindo o processo indefinidamente, tem-se $|f(x)| < \frac{1}{2^n}$, para todo $0 < x < 1$ e $n = 1, 2, \ldots$

De fato, a partir desse desenvolvimento, conclui-se que $f(x) = 0$, para todo $0 < x < 1$.

**Questão 16 (D):** Tirando a tangente de ambos os lados da equação $h(f(a)) + h(g(a)) = \pi/4$, têm-se

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} h(f(a)) + \operatorname{tg} h(g(a))}{1 - \operatorname{tg} h(f(a)) \times \operatorname{tg} h(g(a))} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 &\Rightarrow \frac{f(a) + g(a)}{1 - f(a) \times g(a)} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{\frac{5}{2}}{1 - \left(\frac{25 - 7^{2a}}{16}\right)} = 1 \\ &\Rightarrow 7^{2a} = 24 + 25 = 7^2. \end{aligned}$$

de modo que $a = 1$ e assim

$$f(a) - g(a) = \frac{5+7}{4} - \frac{5-7}{4} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

**Questão 17 (D):** Para que a função seja sempre não negativa, o denominador deve ser estritamente positivo e o numerador deve ser não negativo. Para isso, o denominador deve ter raízes complexas e o numerador pode ter uma raiz dupla real ou duas raízes complexas, ou seja,

$$\begin{cases} (2m+3)^2 - 4(m^2+3) \leq 0 \\ (2m+1)^2 - 4(m^2+2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12m \leq 3 \\ 4m < 7 \end{cases} \Rightarrow m \leq \frac{1}{4}.$$

**Questão 18 (C):** Seja $z = [(1+\cos 2x) + i \operatorname{sen} 2x]^k$. Substituindo $(1+\cos 2x) = 2\cos^2 x$ e $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, têm-se

$$\begin{aligned} z &= (2\cos^2 x + 2i \operatorname{sen} x \cos x)^k \\ &= (2\cos x)^k (\cos x + i \operatorname{sen} x)^k \\ &= (2\cos x)^k e^{ixk} \\ &= 2^k \cos^k x \, (\cos kx + i \operatorname{sen} kx), \end{aligned}$$

cuja parte imaginária é igual a $2^k \cos^k x \operatorname{sen} kx$.

**Questão 19 (A):** Como $P(x)$ tem coeficientes reais, então $-i$ também é raiz de $P(x)$. Além disso, como há duas raízes duplas, então essas raízes devem ser $i$ e $-i$, de modo que a raiz 2 é simples. Com isso,

$$P(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x-2) = (x^2+1)^2(x-2).$$

de modo que $P(1) = (1+1)^2(1-2) = -4$.

**Questão 20 (A):** Para ter solução não trivial, o determinante $D$ da matriz característica do sistema deve ser nulo. Assim, definindo a variável auxiliar $x = \log_2 m$, tal que $\log_2 m^2 = 2x$ e $\log_4 m = \frac{x}{2}$, devemos ter

$$D = -4x + 2\frac{x}{2} + 5x - 5 + 4 - 2x^2\frac{x}{2} = -x^3 + 2x - 1 = -(x-1)(x^2+x-1) = 0,$$

que admite três raízes reais $x_1 = 1$ e $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, tais que $(x_1 + x_2 + x_3) = 0$. Logo, o produto dos possíveis valores de $m$ é dado por

$$m_1 \times m_2 \times m_3 = 2^{x_1 + x_2 + x_3} = 2^0 = 1.$$

**Questão 21 (D):** Com 2 algarismos, podemos formar $N_2 = 3 \times 3$ números que satisfazem as condições do problema. Já, para 3 algarismos, há $N_3 = 3 \times 4 \times 3$ números; para 4 algarismos, há $N_4 = 3 \times 4 \times 3 \times 3$ números; para 5 algarismos, há $N_5 = 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3$ números; e, por fim, para 6 algarismos, há $N_6 = 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3$ números. Assim, o número total de possibilidades é

$$N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = 9 + 36 + 108 + 216 + 216 = 585.$$

**Questão 22 (C):** Por definição,

$$\begin{cases} a_n = \ln 2 + \frac{\ln 4}{2} + \frac{\ln 6}{3} + \frac{\ln 8}{4} + \ldots + \frac{\ln 2n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i)}{i} \\ b_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \ldots + \frac{\ln 2n}{2n} = \sum_{i=2}^{2n} \frac{\ln i}{i} \end{cases},$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i)}{i} - \sum_{i=2}^{2n} \frac{\ln i}{i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i)}{i} - \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i)}{2i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i-1)}{(2i-1)} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{\ln(2i)}{i} - \frac{\ln(2i)}{2i} \right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i-1)}{(2i-1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i)}{2i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(2i-1)}{(2i-1)} \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} + \ldots + \frac{\ln 2n}{2n}. \end{aligned}$$

**Questão 23 (C):** Sejam o lado $\ell$ da base, a altura $h$ de uma face lateral e a altura $H$ da pirâmide. Do enunciado,

$$\frac{\ell^2}{\frac{\ell \times h}{2}} = 2 \Rightarrow h = \ell.$$

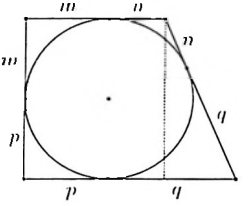
Logo,

$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2};$$

de modo que o volume $V$ da pirâmide é tal que

$$V = \frac{\ell^2 H}{3} = \frac{\ell^3\sqrt{3}}{6} = 12 \Rightarrow \ell^3 = 24\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3} \Rightarrow H = 3 \text{ m}.$$

**Questão 24 (C):**




Usando a notação indicada na figura acima, do enunciado, têm-se

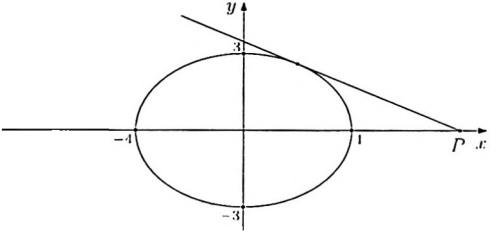
$$\begin{cases} (m+n)+(p+q)=18 \\ (n+q)-(m+p)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+q)=10 \\ (m+p)=8 \end{cases}.$$

e como $(n+q)^2=(m+p)^2+[(p+q)-(m+n)]^2$, então

$$(p+q)-(m+n)=\sqrt{100-64}=6 \Rightarrow \begin{cases} (p+q)=12 \\ (m+n)=6 \end{cases}.$$

Logo, o menor lado do trapézio mede $a=(m+n)=6$ e o raio $r$ da circunferência inscrita é $r=\frac{m+p}{2}=4$, e assim $a+r=10$ cm.

**Questão 25 (D):**




A reta tangente $t$ pode ser descrita por $t: y=\alpha(x-8)$, cuja interseção com a elipse é caracterizada por

$$\frac{x^2}{16}+\frac{\alpha^2(x-8)^2}{9}=1 \Rightarrow (9+16\alpha^2)x^2-256\alpha^2 x+16(64\alpha^2-9)=0.$$

Forçando a interseção da reta com a elipse a ser única, devemos ter

$$256^2\alpha^4=64(9+16\alpha^2)(64\alpha^2-9) \Rightarrow \alpha^2=\frac{3}{16} \Rightarrow \alpha=-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

já que a interseção se encontra no primeiro quadrante.

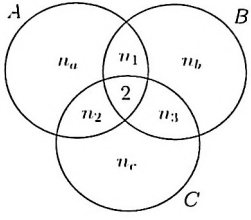
# II.14 Vestibular 2000

**Questão 01 (E):** Pelas definições de $f(x)$ e $g(x)$, têm-se $10^{-3} \leq g(x) \leq 10^3$, de modo que $g(x)$ não é sobrejetora, e ainda $g(f(x)) = 10^{3\cos 5(x^3)}$. Logo,

$$\begin{cases} f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \\ g(-x) = 10^{3\cos 5(-x)} = 10^{3\cos(-5x)} = 10^{3\cos 5x} \\ g \circ f(-x) = 10^{3\cos 5(-x)^3} = 10^{3\cos(-5x^3)} = 10^{3\cos 5x^3} = g \circ f(x) \end{cases}$$

de modo que $f(x)$ é ímpar, $g(x)$ é par e $g(f(x))$ é par.

**Questão 02 (D):**




Usando a notação da figura acima,

$$\begin{cases} n_a = n(A \cup B \cup C) - n(B \cup C) = 11 - 10 = 1 \\ n_b = n(A \cup B \cup C) - n(A \cup C) = 11 - 9 = 2 \\ n_c = n(A \cup B \cup C) - n(B \cup C) = 11 - 8 = 3 \end{cases}$$

e ainda

$$n_1 + n_2 + n_3 = n(A \cup B \cup C) - (n_a + n_b + n_c) - n(A \cap B \cap C) = 3.$$

de modo que

$$n(A) + n(B) + n(C) = (n_a + n_b + n_c) + 2(n_1 + n_2 + n_3) + 3n(A \cap B \cap C) = 18.$$

**Questão 03 (B):** Simplificando,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!\,(20-n)!}\, x^n = (1+x)^{20}.$$

Logo,

$$\begin{cases} f(1) = 2^{20} \\ f(-1) = 0 \\ f(-2) = (-1)^{20} = 1 \end{cases},$$

de modo que a afirmação I é falsa e as afirmações II e III são verdadeiras.

**Questão 04 (A):** Os algarismos 3 e 4 podem ser tratados como um único algarismo, com duas possibilidades: 34 e 43. Com isso, temos $5! \times 2$ números em que os algarismos 3 e 4 são adjacentes. Nesses números, os algarismos 1 e 2 podem assumir $5 \times 4 = 20$ posições distintas, das quais $4 \times 2 = 8$ são adjacentes. Logo, o total de números que satisfazem as condições do enunciado é igual a

$$5! \times 2 \times \frac{20-8}{20} = 144.$$

**Questão 05 (C):** Como os coeficientes do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são reais, se $1+2i$ é raiz, então $1-2i$ também o é, de forma que, por Girard,

$$\begin{cases} a = -(1+1+2i+1-2i) = -3 \\ b = 1(1+2i) + 1(1-2i) + (1+2i)(1-2i) = 7 \\ c = -1(1+2i)(1-2i) = -5 \end{cases} \Rightarrow b + c = 2.$$

**Questão 06 (C):** Definindo a variável auxiliar $y = 2^{x^2}$, podemos reescrever a equação do enunciado na forma

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = 1 \text{ ou } 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2} = 2^0 \Rightarrow x = 0 \\ 2^{x^2} = 2^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases},$$

de modo que a soma das raízes reais positivas é igual a $\sqrt{2}$.

**Questão 07 (D):** Por inspeção, é possível concluir que $x = 0$ e $x = -1$ são raízes do polinômio $p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x$, que, assim, pode ser decomposto da forma

$$p(x) = x(x + 1)(6x^2 - 11x + 4),$$

de modo que suas outras duas raízes são

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{12} = \frac{11 \pm 5}{12} = \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{4}{3}.$$

Logo, a solução da inequação $p(x) < 0$, é tal que

$$x \in (-1, 0) \cup (\frac{1}{2}, \frac{4}{3}),$$

cujo comprimento total é $(0 - (-1)) + (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{11}{6}$.

**Questão 08 (A):**

- Como a função $(\frac{1}{2})^x$ é decrescente, para $x \in S$, têm-se

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4,$$

  e a afirmação I é verdadeira;

- Para $x = 0$, é simples ver que

$$\frac{1}{\sqrt{32 - 2^0}} = \frac{1}{\sqrt{31}} > \frac{1}{\sqrt{32}},$$

  e a afirmação II é falsa;

- Para $x = 1$, é simples ver que

$$2^2 - 2^1 = 4 - 2 = 2 > 0,$$

  e a afirmação III é falsa.

**Questão 09 (E):** Denotando $z = (a + bi)$, com $a$ e $b$ reais, têm-se

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 = 4 \\ (a+1)^2 + (b+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow -2a - 2b = 2a + 2b \Rightarrow a = -b.$$

Logo, devemos ter

$$(a-1)^2 + (-a-1)^2 = 4 \Rightarrow 2a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ e } b = \mp 1.$$

de modo que $S = \{1 - i, -1 + i\}$, cujo produto dos elementos é igual a $(1 - i)(-1 + i) = 2i$.

**Questão 10 (B):** Simplificando,

$$f(x) = 2\operatorname{sen} 3x - \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}\frac{x}{2},$$

de modo que

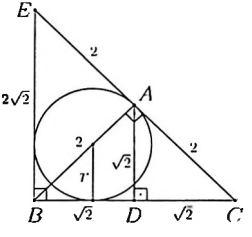
$$f(-x) = 2\operatorname{sen} 3(-x) + \operatorname{sen}\frac{-x}{2} = -2\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen}\frac{x}{2} = -f(x),$$

ou seja, $f(x)$ é uma função ímpar. Além disso, $f(x)$ é a soma de duas parcelas periódicas com períodos fundamentais $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ e $T_2 = 4\pi$. Como $T_2$ é múltiplo de $T_1$, então $T_2$ é também o período fundamental de $f(x)$.

**Questão 11 (B):** Do enunciado, devemos ter

$$2(-5n) = (2 + 3n) + (1 - 4n) \Rightarrow n = -\frac{1}{3} \Rightarrow n \in [-1, 0].$$

**Questão 12 (D):**




Como indicado na figura acima, o triângulo $\Delta EBC$ é retângulo isósceles com catetos $EB = BC = 2\sqrt{2}$ e hipotenusa $EC = 4$, de modo que o raio $r$ do círculo inscrito nesse triângulo é tal que

$$r + r\sqrt{2} = 2 \Rightarrow r = 2(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \pi r^2 = 4\pi(3 - 2\sqrt{2})\ \text{cm}^2.$$

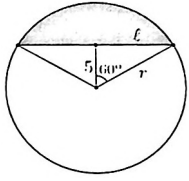
**Questão 13 (C):** Sejam $C = (x_0, 0)$ e $D$ o determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ x_0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 - x_0 + 2x_0 - 3 = 3x_0 - 7,$$

de modo que a área do triângulo $\Delta ABC$ é dada por

$$S_{ABC} = \frac{|D|}{2} = \frac{|3x_0 - 7|}{2} = 4 \Rightarrow x_0 = \frac{7 \pm 8}{3} \Rightarrow x_0 = 5 \text{ ou } -\frac{1}{3}.$$

**Questão 14 (E):**




A figura acima representa o topo do cilindro de altura $h$, onde

$$\cos 60° = \frac{5}{r} \Rightarrow r = \frac{5}{\cos 60°} = 10 \Rightarrow \ell = r \operatorname{sen} 60° = 5\sqrt{3}.$$

Dessa forma, a área da seção é igual a

$$2\ell \times h = 10h\sqrt{3} = 30\sqrt{3} \Rightarrow h = 3.$$

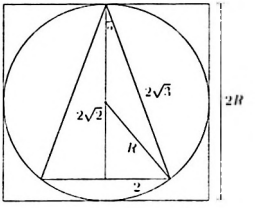
de modo que área $S$ sombreada é igual a

$$S = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{2\ell \times 5}{2} = \frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}.$$

e o volume desejado $V$ é dado por

$$V = S \times h = (100\pi - 75\sqrt{3}) \text{ cm}^3.$$

**Questão 15 (D):**




Planificando o problema, conforme ilustrado na figura acima, têm-se,

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = 2\,\frac{\sqrt{6}}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Assim, se $R$ é o raio da esfera, pela lei dos senos, tem-se

$$\frac{4}{\operatorname{sen} 2\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Dessa forma, as áreas totais do cilindro $S_C$ e do cone $S_c$ são tais que

$$\frac{S_C}{S_c} = \frac{2\pi R^2 + 2\pi R(2R)}{\pi 2^2 + \pi 2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{27\pi}{4\pi(1+\sqrt{3})} = \frac{27(\sqrt{3}-1)}{8}.$$

**Questão 16 (E):** Sejam as retas $y = 3x + \beta$, cuja interseção com a circunferência dada é tal que

$$x^2 + (3x+\beta)^2 - 2x - (3x+\beta) = 0 \Rightarrow 10x^2 + (6\beta - 5)x + \beta^2 - \beta = 0.$$

Forçando essa interseção a ser única, de modo que as retas sejam tangentes à circunferência, têm-se

$$(6\beta-5)^2 = 40(\beta^2-\beta) \Rightarrow 4\beta^2 + 20\beta - 25 = 0$$
$$\Rightarrow \beta = \frac{-20 \pm \sqrt{400+400}}{8} = \frac{5(-1\pm\sqrt{2})}{2}.$$

Logo, a distância $D$ desejada é dada por

$$D = (\beta_1 - \beta_2)\cos\alpha = \frac{5}{2}[(-1+\sqrt{2}) - (-1-\sqrt{2})]\cos\alpha = 5\sqrt{2}\cos\alpha,$$

onde $\alpha$ é tal que

$$\operatorname{tg}\alpha = 3 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

de modo que $D = \sqrt{5}$.

**Questão 17 (C):** Do enunciado, devemos ter

$$\begin{aligned} 3\sec x + 2\operatorname{tg} x = 3 &\Rightarrow 3 + 2\operatorname{sen} x = 3\cos x \\ &\Rightarrow \left(\frac{3(\cos x - 1)}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \\ &\Rightarrow 13\cos^2 x - 18\cos x + 5 = 0 \\ &\Rightarrow \cos x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 260}}{26} = \frac{18 \pm 8}{26} = 1 \text{ ou } \frac{5}{13}. \end{aligned}$$

Logo, como $0 < x < 2\pi$, então $\cos x \neq 1$, e assim $\cos x = \frac{5}{13}$.

**Questão 18 (C):** Denotando $R(x) = ax + b$, podemos escrever

$$P(x) = (x^2 + x)(x^2 - 3) + ax + b,$$

de modo que

$$\begin{cases} P(1) = -4 + a + b = 0 \\ R(4) = 4a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = b = 2,$$

e assim

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2,$$

cujo coeficiente em $x$ é $-1$.

**Questão 19 (A):** Do enunciado, $X$ deve ser solução de $NX = MP$, ou seja.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases},$$

de modo que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 + 25 + 1 = 35.$$

**Questão 20 (B):** Como

$$AB = \begin{bmatrix} (\log_{1/3} x^2) + -3\log_{1/3} & (\log_{1/3} x)(\log_{1/3} x^2) - 4 \\ -\log_3 x - 3\log_{1/3} x & -4 \end{bmatrix}.$$

então, definindo a variável auxiliar $y = \log_3 x$, para que $AB$ seja simétrica, devemos ter

$$\begin{aligned}(\log_{1/3} x)(\log_{1/3} x^2) - 4 = -\log_3 x - 3\log_{1/3} x &\Rightarrow (-y)(-2y) - 4 = -y + 3y \\ &\Rightarrow 2y^2 - 2y - 4 = 0 \\ &\Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4} = 2 \text{ ou } -1 \\ &\Rightarrow x = 3^2 \text{ ou } 3^{-1}.\end{aligned}$$

cuja soma das possíveis soluções é $9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$.

**Questão 21 (A):** Como $M$ é uma matriz triangular (superior), as soluções da equação $\det(M - \lambda I) = 0$ são da forma $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b = aq$ e $\lambda_3 = aq^2$. Logo, devemos ter

$$a + aq + aq^2 = 7a \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow q = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = -3 \text{ ou } 2$$

de modo que $q = 2$, pois $q > 0$, e assim

$$a(aq)(aq^2) = a \Rightarrow 8a^3 = a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}, b = aq = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = aq^2 = \sqrt{2}.$$

e assim

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{21}{8}.$$

**Questão 22 (E):** Como

$$\begin{cases} \cos\hat{A} = \frac{3}{5} \\ \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{4}{5} \\ \cos\hat{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Logo,

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \operatorname{sen}(\hat{A} + \hat{C}) = \operatorname{sen}\hat{A}\cos\hat{C} + \operatorname{sen}\hat{C}\cos\hat{A} = \frac{4}{5\sqrt{5}} + \frac{6}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

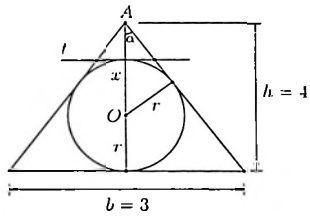
e, pela lei dos senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

de modo que a área do triângulo $\Delta ABC$ é dada por

$$S_{ABC} = \frac{a \times c \times \operatorname{sen}\hat{B}}{2} = \frac{25}{2} \text{ cm}^2.$$

**Questão 23 (B):**



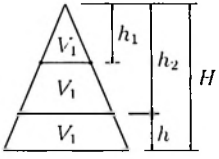

Na figura acima, a distância $x$ do vértice $A$ do triângulo ao centro $O$ da circunferência é tal que

$$\begin{cases} x + r = h = 4 \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{x} = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{\operatorname{sen}\alpha} + r = 4 \Rightarrow r = \frac{3}{2},$$

de modo que o segmento $s$ de $t$ é tal que

$$\frac{s}{h - 2r} = \frac{b}{h} \Rightarrow s = \frac{6(4-3)}{4} = \frac{3}{2} \text{ cm}.$$

**Questão 24 (D):**



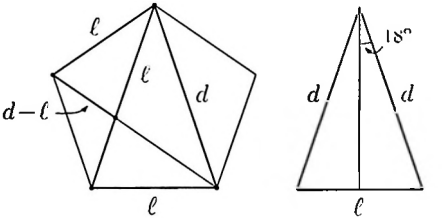

A razão dos volumes das pirâmides formadas é igual ao cubo da razão das respectivas alturas. Assim,

$$\frac{2V_1}{3V_1} = \frac{h_2^3}{H^3} \Rightarrow h_2 = \frac{6\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt[3]{2}.$$

de modo que a altura desejada $h$ do tronco inferior é igual a

$$h = H - h_2 = \frac{6}{\sqrt[3]{9}} - 2\sqrt[3]{2} = 2(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \text{ cm}.$$

**Questão 25 (A):**




Analisando a semelhança dos triângulos em destaque no pentágono regular de lado $\ell$ e diagonal $d$, têm-se

$$\frac{\ell}{d-\ell} = \frac{d}{\ell} \Rightarrow \ell^2 + d\ell - d^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4d^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} d$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{10} = \operatorname{sen} 18^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Desenvolvendo

$$\operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} 3x \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos 3x = \cos 3x,$$

a inequação do enunciado por ser reescrita como

$$2\operatorname{sen} x \cos x - (4\cos^3 x - 3\cos x) > 0 \Rightarrow (2\operatorname{sen} x - 4\cos^2 x + 3)\cos x > 0$$

$$\Rightarrow (4\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x - 1)\cos x > 0.$$

Analisando as raízes de $(4\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x - 1)$, têm-se

$$\operatorname{sen} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Assim, como $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, então $\cos x \geq 0$ e $\operatorname{sen} x \geq 0$, de modo que devemos ter $x \neq \frac{\pi}{2}$ e ainda

$$\left(\operatorname{sen} x + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(\operatorname{sen} x + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) > 0 \Rightarrow \left(\operatorname{sen} x + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}.$$

# II.15 Vestibular 1999

**Questão 01 (E):** Com o conceito de par ordenado, as propriedades apresentadas são todas válidas, de modo que as afirmações I, II e III são verdadeiras.

**Questão 02 (D):** Começando com 1, 2 ou 4, há um total de $3 \times 4! = 72$ números; começando com 61, há $3! = 6$ números; começando com 62, há 2 números (62147 e 62174) menores que 62417, de modo que esse número ocupa o $n$-ésimo lugar com $n = (72 + 6 + 2 + 1) = 81$.

**Questão 03 (E):**

- Como $\frac{1}{3} < 1 < \frac{3}{2}$, então $f(x)$ é crescente e $g(x)$ decrescente, e a afirmação II é falsa;
- Além disso, $f(0) = g(0) = 1$, de modo que os gráficos das duas funções se interceptam, e a afirmação I é falsa;
- Das respectivas definições,

$$\begin{cases} f(-2)g(-1) = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{4}{3} \\ f(-1)g(-2) = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \end{cases}$$

e a afirmação III é falsa.

**Questão 04 (C):** Como $a > 1$, então devemos ter

$$2x(1-x) > x - 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 < 0 \Rightarrow 2(x-1)(x+\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 1.$$

**Questão 05 (B):** Como $\log_{\frac{1}{4}} a = -\log_4 a = \log_4 \frac{1}{a}$, então devemos ter

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \\ \frac{1}{x+1} = x-1 \end{cases} \Rightarrow S = \{\sqrt{2}\} \rightarrow S \subset ]1,2[.$$

**Questão 06 (D):**

- Se $h(g(f(x))) = x$, então $h(x)$ é a inversa de $g(f(x))$, de modo que $h(x)$ e $g(f(x))$ devem ser bijetoras, ou seja, injetoras e sobrejetoras ao mesmo tempo, e a afirmação I é verdadeira;
- Para que $g(f(x))$ seja inversível, $f(x)$ deve ser bijetora também, e a afirmação II também é verdadeira;
- Como $h(x)$ é sobrejetora e injetora, a solução de $h(x) = 0$ existe e é única, de modo que a afirmação III é verdadeira.

**Questão 07 (D):** Pela definição da matriz $A$, tem-se

$$(AA^t - 3I) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

de modo que o sistema $(AA^t - 3I)X = B$ é equivalente a

$$\begin{cases} -x - 2y = 1 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = 0 \Rightarrow x + y = -1.$$

**Questão 08 (C):** Seja

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

de modo que

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (xa+d-y) & (xb+e+h) & (xc+f+i) \\ ya & yb & yc \\ (za-d+y) & (zb-e+h) & (zc-f+i) \end{bmatrix} = I.$$

Com isso,

$$\begin{cases} ya = yc = 0 & \Rightarrow a = c = 0. \\ yb = 1 & \\ d + g = 1 & \Rightarrow d = g = \frac{1}{2}, \\ -d - g = 0 & \\ f + i = 0 & \Rightarrow -f = i = \frac{1}{2}. \\ -f + i = 1 & \\ \frac{x}{y} + e + h = 0 & \Rightarrow h = -\frac{x+z}{2y} \text{ e } e = \frac{z-x}{2y} \\ \frac{z}{y} - e + h = 0 & \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{z-x}{2y} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{x+z}{2y} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

de modo que a soma dos termos da primeira coluna de $A^{-1}$ é igual a 1.

**Questão 09 (B):** Desenvolvendo a equação do enunciado, têm-se

$$\begin{aligned}
4\frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^4 x} + 4 &\Rightarrow 4\operatorname{sen}^4 x - 4\cos^4 x = 1 \\
&\Rightarrow 4(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 1 \\
&\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{4} \text{ e } \operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{15}}{4} \\
&\Rightarrow \operatorname{sen} 4x = 2\operatorname{sen} 2x \cos 2x = \frac{-\sqrt{15}}{8} \\
&\Rightarrow \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{8}.
\end{aligned}$$

**Questão 10 (A):** Como $q > 1$, pela desigualdade triangular, devemos ter

$$a_1 q^2 < a_1 + a_1 q \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow \left(q - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(q - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0,$$

de modo que

$$\begin{cases} q > 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

**Questão 11 (B):** Do enunciado,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 6a_1 + 15\left(-\frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow a_3 = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}.$$

Assim, devemos ter

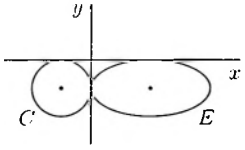
$$\sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 2 \Rightarrow \frac{64}{25} + b_3^2 = 4 \Rightarrow b_3^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow b_3 = \frac{6}{5},$$

pois $b_3 > 0$, de modo que $z_3 = (a_3 + ib_3) = \frac{8+6i}{5}$.

**Questão 12 (C):** Completando os quadrados, têm-se

$$\begin{cases} C : (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ E : (x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 4 \end{cases}$$

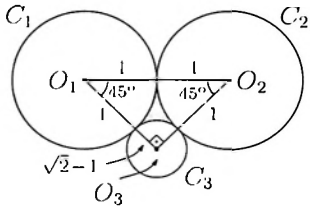
de modo que $C$ corresponde a uma circunferência de centro $(-1,-1)$ e raio 1, enquanto $E$ corresponde a uma elipse de centro $(2,-1)$ e semi-eixos maior 2 e menor 1. Logo, $C$ e $E$ são tangentes externamente no ponto $(0,-1)$, conforme esboçado na figura abaixo.




**Questão 13 (E):** Sejam o raio da base $r$, a altura $h$ e a geratriz $g$ do cone. Das condições do problema,

$$\begin{cases} g^2 = r^2 + h^2 \\ h^2 = gr \end{cases} \Rightarrow g^2 - gr - r^2 = 0 \Rightarrow g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, r \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\, r.$$

**Questão 14 (A):**




O triângulo $\Delta O_1O_2O_3$ formado pelos três centros das circunferências tem lados de comprimentos 2, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$, conforme indicado na figura acima. Assim, esse triângulo é retângulo e isósceles, com ângulos agudos, consequentemente, iguais a 45°. Logo, a área $S$ delimitada pelas três circunferências, que é igual à área do triângulo $\Delta O_1O_2O_3$ subtraído dos três setores circulares indicados, é dada por

$$S = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi(1^2)}{8} - \frac{\pi(1^2)}{8} - \frac{\pi(\sqrt{2}-1)^2}{4} = 1 - \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{2}\ \text{m}^2.$$

**Questão 15 (C):** Sejam $n_3$ e $n_4$ os números de faces triangulares e quadrangulares, respectivamente. Do enunciado,

$$2n_3 = n_4 + (n_3 + n_4) \Rightarrow n_3 = 2n_4.$$

de modo que

$$\begin{cases} A = \frac{3n_3 + 4n_4}{2} = 5n_4 \\ F = n_3 + n_4 = 3n_4 \end{cases}.$$

Logo, pela relação de Euler, tem-se

$$10 + 3n_4 = 5n_4 + 2 \Rightarrow n_4 = 4 \Rightarrow n_3 = 8 \Rightarrow A = 20.$$

**Questão 16 (E):** Do enunciado, devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{\left(x - \frac{2}{x}\right)}{\left(x - \frac{2}{x}\right) + 1} < \frac{x}{x+1} &\Rightarrow \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2 + x} < \frac{x}{x+1} \\ &\Rightarrow \frac{(x^2-2)(x+1) - x(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+1)} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{-2}{(x-1)(x+2)(x+1)} < 0 \\ &\Rightarrow (x-1)(x+2)(x+1) > 0. \end{aligned}$$

de modo que $x \in (-2, -1) \cup (1, \infty)$.

**Questão 17 (D):** Lembrando que

$$\begin{cases} \log_{2^k} a = \frac{\log_2 a}{\log_2 2^k} = \frac{b}{k} \\ \log_{\frac{1}{2}} a = -\log_2 a \end{cases},$$

a expressão $E$ do enunciado é igual a

$$\begin{aligned} E &= 3\left(\frac{b}{2}\right) + 2 + b - b - \log_2(a+1) + \left(\frac{b}{3}\right)^2 - \log_2(a+1) \\ &= \frac{7b}{2} + 2 + \frac{b^2}{9} \\ &= \frac{63b + 36 + 2b^2}{18}. \end{aligned}$$

**Questão 18 (C):** Seja $p(x) = ax^4 + bx^2 + cx + d$, de modo que

$$\begin{cases} p(-2) = 0 \\ p(-2) = p(0) - (-2)^2 - 2 = 0 \\ p(0) = p(2) - (0)^2 - 2 = 6 \\ p(2) = p(4) - (2)^2 - 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ p(0) = d = 6 \\ p(2) = 8a + 4b + 2c + d = 8 \\ p(4) = 64a + 16b + 4c + d = 14 \end{cases}$$

Logo, $b = -\frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{6}$, e o produto $P$ das raízes de $p(x)$, por Girard, é igual a

$$P = -\frac{d}{a} = -36.$$

**Questão 19 (C):** Seja $p(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a$ o polinômio recíproco de 2ª espécie. Como os coeficientes de $p(x)$ são reais, se $x = i$ é raiz, então $x = -i$ também o é, e assim

$$\begin{cases} p(i) = -a + bi + c + c - bi - a = 0 \\ p(-i) = -a - bi + c - c + bi - a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = c.$$

Logo, têm-se que

$$\begin{cases} p(2) = 64a + 32b + 16a - 4a - 2b - a = 75a + 30b = -\frac{105}{8} \\ p(-2) = 64a - 32b + 16a - 4a + 2b - a = 75a - 30b = \frac{255}{8} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{8} \text{ e } b = -\frac{3}{4},$$

de modo que a soma $S$ das raízes de $p(x)$, por Girard, é igual a

$$S = -\frac{b}{a} = 6.$$

**Questão 20 (A):** Seja $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais. Com isso, a equação do enunciado é equivalente a

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} - |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{2}| \\ \Rightarrow\ & (a+1)^2 + (b+1)^2 = (a^2 + b^2) - 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2 \\ \Rightarrow\ & a + b = -\sqrt{2(a^2 + b^2)} \\ \Rightarrow\ & a^2 + 2ab + b^2 = 2(a^2 + b^2) \\ \Rightarrow\ & (a - b)^2 = 0 \\ \Rightarrow\ & a = b. \end{aligned}$$

e, como $a + b = -\sqrt{2(a^2 + b^2)}$, então, necessariamente, devemos ter $a < 0$, de modo que $|z| = -a\sqrt{2}$ e

$$\arg z = \pi + \arg(1 + i) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$

**Questão 21 (A):** Usando a transformação em produto, a expressão $E$ do enunciado é igual a

$$E = \left(2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\cos a\right)\cos a = \sqrt{2}\cos^2 a.$$

que pode ainda ser escrita como

$$E = \sqrt{2}\,\frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a} = \sqrt{2}\,\frac{\frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a}}{1 \cdot \frac{\cos^2}{\operatorname{sen}^2 a}} = \sqrt{2}\,\frac{\operatorname{cotg}^2 a}{1 + \operatorname{cotg}^2 a}.$$

**Questão 22 (A):** O determinante $D$ da matriz característica do sistema deve ser tal que

$$\begin{aligned} D &= \cos a(1 + 3\operatorname{sen}^2 a + 4\operatorname{sen} a\cos a) + (2\operatorname{sen} a + \cos a)\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen} a\cos^2 a \\ &\quad - \operatorname{sen}^2 a\cos a - \cos^2 a(2\operatorname{sen} a + \cos a) - (1 - 3\operatorname{sen}^2 a + 4\operatorname{sen} a\cos a)\operatorname{sen} a \\ &= \cos a - \operatorname{sen}^2 a\cos a - 3\operatorname{sen} a\cos^2 a - \operatorname{sen}^4 a - \cos^4 a - \operatorname{sen} a \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, observando que

$$\cos a - \cos^5 a = \cos a(1 - \cos^2 a) = \cos a\operatorname{sen}^2 a.$$

tem-se

$$\begin{aligned} D &= 3\operatorname{sen} a\cos^2 a - \operatorname{sen}^4 a - \operatorname{sen} a \\ &= 3\operatorname{sen} a\,(1 - \operatorname{sen}^2 a) - \operatorname{sen}^4 a - \operatorname{sen} a \\ &= 2\operatorname{sen} a\,(1 - 2\operatorname{sen}^2 a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} a = 0 \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, \pi \\ \text{ou} \\ a = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}.$$

cuja soma $S$ é igual a

$$S = 0 + \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 5\pi.$$

**Questão 23 (C):** As retas que passam pelo ponto $C : (4, -4)$ são descritas por $y = \alpha x - 4(\alpha + 1)$. Determinando a interseção dessa classe de retas com a parábola, têm-se

$$(x-4)^2 + 2 = \alpha x - 4(\alpha+1) \Rightarrow x^2 - (8+\alpha)x + (4\alpha + 22) = 0.$$

Para que a reta seja tangente, essa equação deve ter uma única solução, e assim

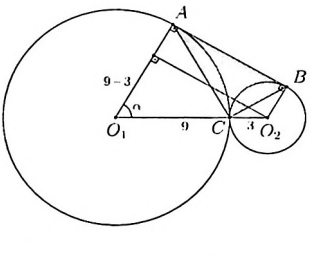
$$(8+\alpha)^2 = 4(4\alpha - 22) \Rightarrow \alpha^2 = 24 \Rightarrow \alpha = \pm 2\sqrt{6},$$

quando então a interseção é caracterizada por

$$\begin{cases} x = \frac{8+\alpha}{2} = 6 \pm \sqrt{6} \\ y = \alpha x - 4(\alpha+1) = 8 \end{cases}$$

Logo, a reta que passa pelos pontos $A$ e $B$ é dada por $y = 8$, cuja distância ao ponto $C$ é igual a 12.

**Questão 24 (B):**




Na figura acima, $O_1$ e $O_2$ são os centros das circunferências de raios 9 e 3, respectivamente. Logo, o comprimento do segmento $AB$ é dado por

$$(9+3)^2 = (9-3)^2 + AB^2 \Rightarrow AB = 6\sqrt{3},$$

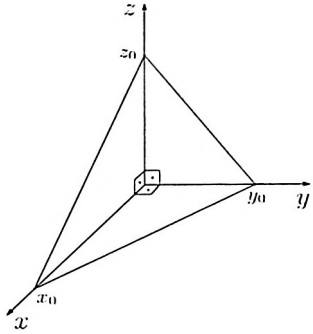
e assim,

$$\cos\alpha = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Logo, a área $S$ em questão é a área do trapézio $ABO_1O_2$ subtraída das áreas dos triângulos $\Delta O_1AC$ e $\Delta O_2BC$, de modo que

$$\begin{aligned} S &= \frac{3+9}{2}\,6\sqrt{3} - \frac{9\times 9}{2}\operatorname{sen} 60^\circ - \frac{3\times 3}{2}\operatorname{sen} 120^\circ \\ &= 36\sqrt{3} - \frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{27\sqrt{3}}{2}\ \text{m}^2. \end{aligned}$$

**Questão 25 (A):**




Sejam $(x_0, 0, 0)$, $(0, y_0, 0)$ e $(0, 0, z_0)$ os pontos em que o plano intercepta os eixos coordenados indicados na figura acima. Por Pitágoras, têm-se

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 100 \\ x_0^2 + z_0^2 = 144 \\ y_0^2 + z_0^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt{\frac{100+144-64}{2}} = 3\sqrt{10} \\ y_0 = \sqrt{\frac{100+64-144}{2}} = \sqrt{10} \\ z_0 = \sqrt{\frac{144+64-100}{2}} = 3\sqrt{6} \end{cases}.$$

de modo que o volume $V$ do tetraedro é dado por

$$V = \frac{x_0 \times y_0 \times z_0}{6} = 15\sqrt{6}\ \text{m}^3.$$

## II.16 Vestibular 1998

**Questão 01 (C):** Da definição de $f(x)$, tem-se

$$f(-x) = 2\operatorname{sen}(-2x) - \cos(-2x) = -2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x \neq \pm f(x),$$

de modo que a função $f(x)$ não é par nem ímpar. Além disso, é simples ver que

$$f(x+\pi) = 2\operatorname{sen}(2x+2\pi) - \cos(2x+2\pi) = 2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x = f(x),$$

de modo que $f(x)$ é periódica de período $\pi$.

**Questão 02 (D):** A expressão $E$ do enunciado é equivalente a

$$E = (\operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x)^5 = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)^5 = \left(\frac{-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^5 = (-1)^5 = -1.$$

**Questão 03 (A):** Pelas propriedades dos determinantes de matrizes $X$ e $Y$ de ordem $n$, com $X$ inversível, têm-se

$$\begin{cases} \det(-X) = (-1)^n \det X \\ \det X^t = \det X \\ \det(XY) = \det X \det Y \\ \det X^{-1} = \det^{-1} X \end{cases}$$

e assim

$$\det(-A^t) = (-1)^2 \det A^t = \det A = \det^{-1} M \times \det B \times \det M = \det B.$$

**Questão 04 (D):** O polígono em questão é um hexágono inscrito no círculo de raio $r$ unitário. Assim, a área $S$ do polígono é dada por

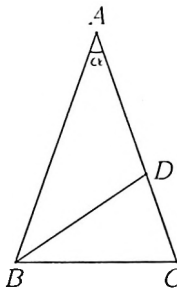
$$S = 6 \times \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

**Questão 05 (B):** Multiplicando a segunda equação por $i$ e adicionando à primeira, tem-se

$$x^3 + 3x^2(yi) + 3x(yi)^2 + (iy)^3 = 1 + i \Rightarrow (x+iy)^3 = 1 + i,$$

de modo que $z^3 = (1+i)$, e assim $|z|^3 = \sqrt{2}$, ou seja, $|z| = \sqrt[6]{2}$.

**Questão 06 (C):**




Na figura acima, seja $B\hat{A}C = \alpha$. Como $AD = BD$, então, $D\hat{B}A = B\hat{A}D = \alpha$, e assim $B\hat{D}C = D\hat{B}A + D\hat{A}B = 2\alpha$. Além disso, como $BD = BC$, então, $B\hat{C}D = B\hat{D}C = 2\alpha$. Por fim, como $AB = AC$, então, $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 2\alpha$. Logo,

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ.$$

**Questão 07 (E):** A soma $S$ da progressão infinita é dada por

$$S = \frac{a_1}{1 - a_1} = 3a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3},$$

de modo que

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1^2 + a_1^3 = \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} = \frac{18}{27} + \frac{12}{27} + \frac{8}{27} = \frac{38}{27}.$$

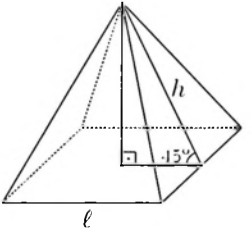
**Questão 08 (D):** Mudando todos os logaritmos para a base 7, têm-se

$$\begin{aligned}
\frac{\log_7 7^2}{\log_7 y} = \frac{\log_7 7}{\log_7 y^2} + \frac{\log_7 7}{\log_7 2y} &\Rightarrow \frac{2}{\log_7 y} = \frac{1}{2\log_7 y} + \frac{1}{(\log_7 2) + (\log_7 y)} \\
&\Rightarrow 3[(\log_7 2) + (\log_7 y)] = 2\log_7 y \\
&\Rightarrow \log_7 y = -3\log_7 2 = \log_7 2^{-3} \\
&\Rightarrow y = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

**Questão 09 (C):** O número total de anagramas é $12!$. Quando as vogais estão juntas, podemos considerá-las como uma só "letra". Nesses casos, teríamos $8!$ permutações das "letras" resultantes ('V', 'S', 'T', 'B', 'L', 'N', 'D', 'vogais') e $5!$ permutações das vogais para compor a "letra" conjunta. Assim, o número $N$ de anagramas da palavra que não apresentam as cinco vogais juntas é

$$N = 12! - 8! \times 5!$$

**Questão 10 (D):**




Seja $h$ a altura de uma face lateral da pirâmide, cujo lado da base é $\ell = 2$, de modo que a razão entre a área da base $S_b$ e a área lateral $S_\ell$ dessa pirâmide é igual a

$$\frac{S_b}{S_\ell} = \frac{\ell^2}{4 \times \frac{\ell \times h}{2}} = \frac{\ell}{2h} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Questão 11 (E):**

- Da definição de $f(x)$, tem-se

$$f(x+y) = -3a^{x+y} = -3a^x a^y = \frac{f(x)f(y)}{-3} \neq f(x)f(y),$$

  e a afirmação I é falsa;
- Como $a > 0$, então $a^x > 0$ e $f(x) = -3a^x < 0$, para todo $x$ real, de modo que $f(x)$ não é sobrejetora, e a afirmação II é falsa;
- Como $0 < a < 1$, então $a^x$ é decrescente e $f(x) = -3a^x$ é crescente, de modo que para $x > 0$, tem-se $-3 < f(x) < 0$, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 12 (A):** Das definições das funções $f(x)$ e $g(x)$, têm-se

$$f(g(x)) = g^2(x) - 9 = x - 6 \Rightarrow g^2(x) = x + 3 \Rightarrow g(x) = +\sqrt{x+3}.$$

cujo domínio é $A = [-3, +\infty)$.

**Questão 13 (D):** Seja $r$ a razão da progressão aritmética, de modo que $x_1 = x_2 - r$ e $x_3 = x_2 + r$, e assim

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ e } x_1 = -x_3 = -r.$$

Logo, $e^0 = 1$ é raiz da equação que pode ser decomposta da forma

$$[2e^{2x} + (a+2)e^x + (9+a)](e^x - 1) + (a + b - 9) = 0.$$

Substituindo $x = 0$, $x = -r$ e $x = r$ nessa equação, têm-se

$$\begin{cases} a + b + 9 = 0 \\ e^{-r}[2e^{-r} + (a+2) + (9+a)e^r] = 0 \\ e^r[2e^r + (a+2) + (9+a)e^{-r}] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 9 = 0 \\ 2 = 9 + a \end{cases}.$$

de modo que $a - b = (-7) - (-2) = -5$.

**Questão 14 (C):** Observando que $x = \pm 1$ são raízes de $p(x)$, esse polinômio pode ser decomposto como

$$p(x) = [x^4 + 2x^3 + (a+1)x^2 + 2x + 1](x^2 - 1).$$

Observando que o primeiro termo $t(x)$ é recíproco de 1ª espécie, podemos escrevê-lo da forma

$$\begin{aligned} t(x) &= \left[x^2 + 2x + (a+1) + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right]x^2 \\ &= \left[\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - (a-1) - 2\right]x^2 \\ &= \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + (a-1)\right]x^2. \end{aligned}$$

Usando a variável auxiliar $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)$, têm-se, então, as raízes em $y$,

$$y^2 + 2y + (a-1) = 0 \Rightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{1 - 4(a-1)}}{2} = -1 \pm \sqrt{2 - a}.$$

Assim,

$$x^2 - xy + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

de modo que devemos ter

$$\begin{aligned} y^2 \geq 4 &\Rightarrow 1 \mp 2\sqrt{2-a} + (2-a) \geq 4 \\ &\Rightarrow \mp 2\sqrt{2-a} \geq 1 + a \\ &\Rightarrow -2\sqrt{2-a} \geq 1 + a, \end{aligned}$$

que é a condição mais restritiva. Como $(1+a) \leq -2\sqrt{2-a} < 0$, então $(1+a)$ também é negativo, e assim

$$(1+a)^2 \geq 4(2-a) \Rightarrow a^2 + 6a - 7 \geq 0 \Rightarrow (a+7)(a-1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a \leq -7 \\ \text{ou} \\ a \geq 1 \end{cases}.$$

Logo, juntando todas as restrições, devemos ter

$$\begin{cases} 2-a \geq 0 \\ 1+a < 0 \\ a \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \leq -7.$$

**Questão 15 (A):** Seja $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Do enunciado,

$$\begin{cases} p(x) = q(x)(x-2) + 26 \\ p(x) = h(x)(x^2 + x - 1) + 8x - 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(2) = 26 \\ p(0) = q(0)(0-2) + 26 = 13(-2) + 26 = 0 \\ p(1) = q(1)(1-2) + 26 = 26(-1) + 26 = 0 \\ h(x) = ax^2 + (b-a)x + (2a-b+c) \\ 8x - 5 = (-3a + 2b - c + a)x + (2a - b + c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a - 8b + 4c + 2d + e = 26 \\ e = 0 \\ a + b + c + d - e = 0 \\ -3a + 2b - c + d = 8 \\ 2a - b + c = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b = 2, c = -7, d = 3, e = 0.$$

Com isso,

$$h(x) = 2x^2 + (2-2)x + (4-2-7) = 2x^2 - 5 \Rightarrow h(2) + h(3) = 3 + 13 = 16.$$

**Questão 16 (B):** No primeiro sistema, têm-se

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + y \\ z = a + 2y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} + y - 3y + a + 2y = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Para que o segundo sistema tenha infinitas soluções, o determinante $D$ de sua matriz característica deve ser nulo, ou seja,

$$D = 6 + 2 + 0 - 0 - b + 3 = 0 \Rightarrow b = 11,$$

de modo que

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{22}, \quad \frac{b}{a} = 22 \quad \text{e} \quad ab = \frac{11}{2}.$$

**Questão 17 (C):** Das definições das matrizes $A$ e $B$, têm-se

$$\begin{cases} \det A = 2 \\ \det B = 2 \end{cases} \Rightarrow \det(AB) = \det A \times \det B = 4.$$

Além disso,

$$AB = \begin{bmatrix} (2 + a + a^2) & (2 + a + 2a + a^2) \\ (1 + a) & (3 + a) \end{bmatrix},$$

de modo que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (3 + a) & -(2 + a + 2a + a^2) \\ -(1 + a) & (2 + a + a^2) \end{bmatrix},$$

cuja soma $S$ dos elementos da diagonal principal é igual a

$$S = \frac{1}{4}(3 + a + 2 + a + a^2) = \frac{1}{4}(5 + 2a + a^2).$$

**Questão 18 (A):** Lembrando que $\log_{\frac{1}{5}} a = -\log_5 a = \log_5 \frac{1}{a}$, para $a > 0$, então a inequação do enunciado equivale a

$$\begin{aligned} 4x \log_5(x + 3) \geq -(x^2 + 3) \log_5(x + 3) &\Rightarrow (x^2 + 4x + 3) \log_5(x + 3) \geq 0 \\ &\Rightarrow (x + 1)(x + 3) \log_5(x + 3) \geq 0 \\ &\Rightarrow x \in (-3, -2] \cup [-1, +\infty). \end{aligned}$$

**Questão 19 (B):** Desenvolvendo a equação original, têm-se

$$\sqrt{3}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 2\operatorname{sen} x \cos x\right) + \cos 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\operatorname{tg} x\,(1 - 2\cos^2 x) + \cos 2x = 0.$$

Logo, devemos ter

$$\cos 2x(1 - \sqrt{3}\operatorname{tan} x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \text{ou} \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \end{cases},$$

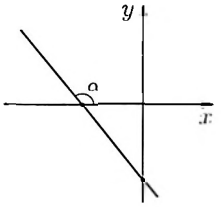
cuja soma $S$ é

$$S = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = 4\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}.$$

**Questão 20 (B):** O número de diagonais de um polígono de $n$ lados é igual a $\frac{n(n-3)}{2}$. Assim:

- Se $n = \frac{n(n-3)}{2}$, então $n = 5$, e a afirmação I é verdadeira;
- Se $4n = \frac{n(n-3)}{2}$, então $n = 11$, e a afirmação II é falsa;
- Se $\frac{n-3}{2}$ é um número natural, então $n$ é ímpar, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 21 (E):**




Se $\alpha$ é o ângulo entre as diagonais de comprimentos $d_1$ e $d_2$, a área $S$ do paralelogramo é igual a

$$S = \frac{d_1 \times d_2 \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{4 \times 6 \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = 12\operatorname{sen}\alpha.$$

onde

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}.$$

e assim

$$S = \frac{48}{5}.$$

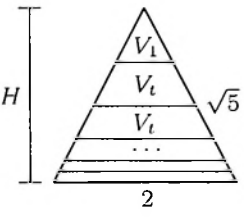
**Questão 22 (B):** Sejam $A$, $F$ e $V$ os números de arestas, faces e vértices, respectivamente, do poliedro original, e $A'$, $F'$ e $V'$ suas contrapartidas no poliedro seccionado. Sejam, ainda, $n_3$ e $n_4$ os números de faces triangulares e quadrangulares, respectivamente, do poliedro original. Assim, do enunciado, têm-se

$$\begin{cases} A = 16 = \frac{3n_3+4n_4}{2} \\ F = n_3 + n_4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} V' = V - 1 \\ F' = n_4 + 1 \\ A' = \frac{4(n_4-1)}{2} \end{cases}.$$

Logo, aplicando a relação de Euler nos dois poliedros, têm-se

$$\begin{cases} n_3 + n_4 + V = 16 + 2 \\ V - 1 + n_4 + 1 - \frac{4(n_4+1)}{2} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n_3 + 4n_4 = 32 \\ 18 - (n_3 + n_4) = \frac{4(n_4+1)}{2} + 2 - n_4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow n_3 = 4 \text{ e } n_4 = 5$$
$$\Rightarrow m = F = 9 \text{ e } n = V = 9.$$

**Questão 23 (C):**




Sejam $V_1$, $V_{n+1}$, $V_t$ os volumes do menor cone, do cone original e do tronco de cone entre dois planos, respectivamente. Se $H = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$ é a altura do cone original, então o seu volume é

$$V_{n+1} = \frac{\pi(1)^2 H}{3} = \frac{2\pi}{3} = 2V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{\pi}{3}.$$

Além disso,

$$V_{n+1} = V_1 + nV_t \Rightarrow nV_t = V_{n+1} - V_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Logo, a soma $S$ dos volumes de todos os cones formados é igual a

$$S = \frac{(V_1 + V_{n+1})(n+1)}{2} = \frac{3V_1(n+1)}{2} = 2\pi \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 2 \Rightarrow n = 3.$$

e assim

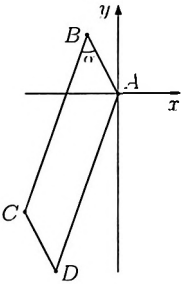
$$V_t = \frac{\pi}{3n} = \frac{\pi}{9}.$$

**Questão 24 (E):** A hipérbole $H$ tem centro no ponto $(-3,2)$ e focos sobre a reta $x=-3$, com distância focal $2c=2\sqrt{5+4}=6$, de modo que os focos de $H$ são os pontos $(-3,-1)$ e $(-3,5)$. Enquanto isso, a parábola $T$ tem vértice em $(1,3)$. Assim, se $P=(x_p,y_p)$, então, do enunciado, devemos ter

$$\begin{aligned}&(x_p+3)^2+(y_p+1)^2+(x_p+3)^2+(y_p-5)^2=3\left[(x_p-1)^2+(y_p-3)^2\right]\\ \Rightarrow\ &x_p^2-18x_p+81-81+y_p^2-10y_p+25-25-14=0\\ \Rightarrow\ &(x_p-9)^2+(y_p-5)^2=81+25+14=120.\end{aligned}$$

que corresponde a uma circunferência com centro em $(9,5)$ e raio $\sqrt{120}$.

**Questão 25 (D):**




Assumindo que os vértices $A$, $B$, $C$ e $D$ estão ordenados geometricamente, então $B-A=C-D$ e assim

$$D=A-B+C=(0,0)-(-1,2)+(-3,-4)=(-2,-6),$$

de modo que

$$\begin{cases}AB=CD=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\\ BC=AD=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}\\ AC=BD=\sqrt{9+16}=5\end{cases}.$$

Logo, pela lei dos cossenos no triângulo $\Delta ABC$, têm-se

$$\begin{aligned}AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\alpha\ &\Rightarrow\ 25=5+40-2\sqrt{5}\times 2\sqrt{10}\cos\alpha\\ &\Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Rightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

e os ângulos internos são, então, $\alpha=\frac{\pi}{4}$ e $(180^\circ-\alpha)=\frac{4\pi}{4}$.

# II.17 Vestibular 1997

**Questão 01 (C):** Como $g(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x$, então $f(g(x)) = 0$.

**Questão 02 (C):** Como $0 < q < n$, então $q$ é divisor de $n!$, de modo que $\frac{n!\,p}{q}$ é um número inteiro. Assim, se $x \in A$, têm-se

$$\cos\left(\frac{n!\,p}{q}\pi\right) = \pm 1 \Rightarrow f(x) = \left[\cos\left(\frac{n!\,p}{q}\pi\right)\right]^{2n} = (\pm 1)^{2n} = 1.$$

**Questão 03 (E):** O domínio $D$ de $f(x)$ é tal que

$$\begin{cases} \pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi > 0 \\ -2x^2 + 3\pi x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi(x-\pi)(x-\frac{1}{\pi}) > 0 \\ (-2x+3\pi)x > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{\pi} \text{ ou } x > \pi \\ 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow 0 < x < \frac{1}{\pi} \text{ ou } \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

**Questão 04 (A):** Usando coordenadas polares, podemos escrever $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, de modo que

$$m = \left|\frac{2^6 e^{i2\pi} + 3\times 2^4 e^{i\pi} + 4i}{2^2 e^{i\frac{\pi}{2}} + 2^3 e^{i\pi} + 6 - 2i}\right|^2 = \left|\frac{64 - 48 + 4i}{4i - 8 + 6 - 2i}\right|^2 = \frac{256+16}{4+4} = 34.$$

**Questão 05 (A):** Sejam $I_1 = (x_1, y_1)$ e $I_2 = (x_2, y_2)$ as interseções da reta com a circunferência dadas, tais que

$$[(3y+m)-1]^2 + (y+3)^2 = 25 \Rightarrow 9y^2 + 6y(m-1) + (m-1)^2 + y^2 + 6y + 9 = 25$$
$$\Rightarrow 10y^2 + 6ym + (m-1)^2 - 16 = 0$$
$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-6m \pm \sqrt{36m^2 - 40[(m-1)^2 - 16]}}{20}$$
$$\Rightarrow y_1 - y_2 = \frac{\sqrt{36m^2 - 40[(m-1)^2 - 16]}}{10}.$$

Dessa forma, a distância $d = I_1 I_2 = 6$ entre as duas interseções é dada por

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{[(3y_1 - m) - (3y_2 - m)]^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{10(y_1 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

de modo que devemos ter

$$\frac{36m^2 - 40[(m-1)^2 - 16]}{10} = 36 \Rightarrow -4m^2 + 80m + 240 = 0$$
$$\Rightarrow m^2 - 20m - 60 = 0$$
$$\Rightarrow m = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 240}}{2} = 10 \pm 4\sqrt{10},$$

e assim $m = (10 + 4\sqrt{10})$, pois $m > 0$.

**Questão 06 (B):** O $i$-ésimo termo $t_i$ da expansão do binômio $(a+b)^m$, de acordo com as potências crescentes de $b$, para $i = 1, 2, \ldots, (m+1)$, é dado por

$$t_i = C_{i-1}^m \, a^{m-i+1} \, b^{i-1}.$$

Assim, do enunciado, $C_5^m (x^n)^{m-5} (x^{-n^2})^5$ e $C_7^m (x)^{m-7} (x^{-1/n})^7$ são independentes de $x$, de modo que

$$\begin{cases} (m-5)n - 5n^2 = 0 \\ m - 7 - \frac{7}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow m - 5 = \frac{5 \times 7}{m-7} \Rightarrow m^2 = 12m \Rightarrow m = 12 \text{ e } n = \frac{7}{5}.$$

**Questão 07 (C):** Isolando $\cos y$ e $\cos x$ nas duas primeiras equações, e substituindo os resultados na terceira equação, têm-se

$$\begin{cases} \cos y = \frac{a - b\cos z}{c} \\ \cos x = \frac{b - a\cos z}{c} \end{cases} \Rightarrow b\,\frac{b - a\cos z}{c} + a\,\frac{a - b\cos z}{c} = c$$
$$\Rightarrow \cos z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2b^2}{2ab} = \frac{b}{a}.$$

Substituindo esse valor para $\cos z$ nas expressões iniciais de $\cos x$ e $\cos y$, têm-se

$$\begin{cases} \cos y = \frac{a - \frac{b^2}{a}}{c} = \frac{a^2 - b^2}{ac} = \frac{c}{a} \\ \cos x = \frac{b - \frac{ab}{a}}{c} = 0 \end{cases},$$

de modo que

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0 + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} = \frac{b+c}{a}.$$

**Questão 08 (X):** Sejam

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},$$

tais que $A^2 = AB = AC = 0$ e ainda $\det A = \det B = \det C = 0$. Logo, as afirmações I, II e III são falsas.

Assuma, agora, por hipótese, que $\det(B - C) \neq 0$. Nesse caso, existe a matriz $(B - C)^{-1}$ e ela é tal que

$$A(B - C) = 0 \Rightarrow A(B + C)(B - C)^{-1} = 0 \Rightarrow A = 0,$$

o que é absurdo. Assim, necessariamente $\det(B - C) = 0$, e a afirmação IV é verdadeira.

**Questão 09 (C):** A soma $S$ de um progressão geométrica infinita, de primeiro termo $a_1$ e razão $q$, é dada por

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\operatorname{cotg}\theta}{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \sec\theta\operatorname{cosec}\theta.$$

**Questão 10 (D):** O ponto $A = (x_a, y_a)$ é determinado por

$$\begin{cases} x_a + y_a = 3 \\ x_a - y_a = -3 \end{cases} \Rightarrow x_a = 0 \text{ e } y_a = 3.$$

Assim, se $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, então devemos ter

$$\begin{cases} x_b + y_b = 3 \\ \sqrt{x_b^2 + (3 - y_b)^2} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x_b^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x_b = 1 \text{ e } y_b = 2$$

$$\begin{cases} x_c - y_c = -3 \\ \sqrt{x_c^2 + (3 - y_c)^2} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x_c^2} = \sqrt{2} \Rightarrow x_c = 1 \text{ e } y_c = 4$$

de modo que a reta $BC$ pode ser descrita por $x = 1$.

**Questão 11 (C):** Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Logo, pela propriedade dada de $f(x)$, têm-se

$$ax^3 + bx^2 + cx + d + 2[a(2 - x)^3 + b(2 - x)^2 + c(2 - x) + d] = (x - 1)^3$$

$$\Rightarrow (-a)x^3 + (12a + 3b)x^2 + (-24a - 8b - c)x + (16a + 8b + 4c + 3d) = (x - 1)^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \Rightarrow a = -1 \\ -12 - 3b = -3 \Rightarrow b = 3 \\ 24 - 24 - c = 3 \Rightarrow c = -3 \\ -16 + 24 - 12 + 3d = -1 \Rightarrow d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -(x - 1)^3 = (1 - x)^3$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = [1 - (1 - x)]^3 = x^3.$$

**Questão 12 (D):** Por inspeção, é possível perceber que $x = \pm 1$ são raízes de $p(x) = 2x^6 - 4x^5 + 4x - 2$, que, desse modo, pode ser escrito como

$$p(x) = 2(x^2 - 1)(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1).$$

Desenvolvendo o fator $f(x) = (x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1)$, têm-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 - 2x + 1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)x^2 \\ &= \left[\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right]x^2 \\ &= \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right]x^2. \end{aligned}$$

Assim, definindo a variável auxiliar $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)$, as raízes do primeiro fator de $f(x)$ são tais que

$$y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2},$$

de modo que

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - (1 \pm \sqrt{2})x + 1 = 0 \\ \Rightarrow x = \frac{(1 \pm \sqrt{2}) \pm \sqrt{(1 \pm \sqrt{2})^2 - 4}}{2} = \frac{(1 \pm \sqrt{2}) \pm \sqrt{\pm 2\sqrt{2} - 1}}{2}. \end{aligned}$$

Assim, $p(x)$ tem quatro raízes reais, sendo três positivas (sejam elas, $x = 1$ e $x = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$) e uma negativa ($x = -1$), e duas raízes complexas ($x = \frac{(1-\sqrt{2})\pm\sqrt{-2\sqrt{2}-1}}{2}$).

**Questão 13 (D):** Como $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $p_3(x)$ e $r(x)$ é o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$, então podemos escrever

$$\begin{cases} p_1(x) = q_{13}(x)p_3(x) \\ p_2(x) = q_{23}(x)p_3(x) \\ p_1(x) = q_{12}(x)p_2(x) + r(x) \end{cases}$$

Assim:

- Usando a notação acima, têm-se

$$\begin{aligned} p_1(x) = q_{13}(x)p_3(x) = q_{12}(x)p_2(x) + r(x) = q_{12}(x)q_{23}(x)p_3(x) + r(x) \\ \Rightarrow (q_{13}(x) - q_{12}(x)q_{23}(x))p_3(x) = r(x). \end{aligned}$$

e a afirmação I é verdadeira;

- Usando, mais uma vez, a notação acima, têm-se

$$p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x) = \left(q_{13}(x) - \frac{1}{2}q_{23}(x)\right)p_3(x).$$

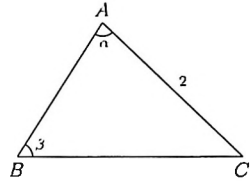
e a afirmação II é verdadeira;

- Do primeiro item,

$$p_1(x)r(x) = q_{13}(x)p_3(x)(q_{13}(x) - q_{12}(x)q_{23}(x))p_3(x),$$

e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 14 (A):**




Pela lei dos senos,

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow BC = AC\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta},$$

de modo que a área do triângulo $\Delta ABC$ é dada por

$$\begin{aligned}
S_{ABC} &= \frac{AC \times BC}{2}\operatorname{sen}[180^\circ - (\alpha+\beta)] \\
&= \frac{AC \times BC}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\
&= \frac{AC \times AC\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\
&= \frac{AC^2}{2}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) \\
&= 2(\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) \\
&= 2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{sen}2\alpha.
\end{aligned}$$

**Questão 15 (B):** Transladando o hexágono para que seu centro coincida com a origem do plano complexo, têm-se $z_1' = (1 - i) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, e os demais vértices $z_2', z_3', \ldots, z_6'$ podem ser obtidos a partir de uma rotação do vértice anterior de um ângulo de 60°. Assim,

$$z_3' = z_2'e^{i\frac{\pi}{3}} = z_1'e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}} = \sqrt{2}(\cos 75° + i\,\mathrm{sen}\,75°),$$

onde

$$\begin{cases} \cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45°\cos 30° - \mathrm{sen}\,45°\,\mathrm{sen}\,30° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \\ \mathrm{sen}\,75° = \mathrm{sen}\,(45°+30°) = \mathrm{sen}\,45°\cos 30° + \mathrm{sen}\,30°\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \end{cases}$$

de modo que

$$z_3' = \frac{1}{2}[(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)] \Rightarrow 2z_3 = 2(z_3' + i) = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+3).$$

**Questão 16 (D):** Denotando $z = (a + bi)$, com $a$ e $b$ reais, têm-se

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + (b-3)^2} = 3 \\ \sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + (b-3)^2 = 9 \\ 4a + 4b = 4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (1-b)^2 + (b-3)^2 = 9$$
$$\Rightarrow 2b^2 - 8b + 1 = 0.$$

Logo, o produto $P$ de todas as soluções é igual a

$$\begin{aligned} P &= [(1 - b_1) + ib_1][(1 - b_2) + ib_2] \\ &= [(1 - b_1)(1 - b_2) - b_1b_2] + i[(1 - b_1)b_2 + (1 - b_2)b_1] \\ &= [(1 - (b_1 + b_2)] + i[(b_1 + b_2) - 2b_1b_2] \\ &= [(1 - 4)] + i[(4) - 2(\frac{1}{2})] \\ &= -3 + 3i. \end{aligned}$$

**Questão 17 (A):** Se $q > 1$ é a razão da progessão geométrica, o polinômio $p(x)$ dado por ser reescrito como

$$p(x) = a_1(x^3 + qx^2 + q^2x + q^3),$$

com

$$p(2i) = a_1(-8i - 4q + 2q^2i + q^3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -8 + 2q^2 = 0 \\ -4q + q^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow q = 2.$$

de modo que, por Girard, têm-se

$$p(x) = a_1(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 4 \\ x_1x_2x_3 = -8 \end{cases}.$$

e ainda

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (-2)^2 - 2(4) = -4.$$

**Questão 18 (E):** Escrevendo $x = y - r$ e $z = y + r$, a equação do enunciado é equivalente a

$$\begin{aligned} & 3a^{y-r} + 2a^y - a^{y+r} = a^y(3a^{-r} + 2 - a^r) = 0 \\ \Rightarrow\ & 3 + 2a^r - a^{2r} = 0 \\ \Rightarrow\ & a^r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = 1 \mp 2 = 3 \text{ ou } -1 \\ \Rightarrow\ & r = \log_a 3. \end{aligned}$$

**Questão 19 (E):** Desenvolvendo o sistema, têm-se

$$\begin{cases} a_1x + a_1qy = c \\ a_1q^2x + a_1q^3y = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2x + q^3y = q^2c \\ q^2x + q^3y = d \end{cases}.$$

Logo, o sistema é possível (e indeterminado) se $q^2c = d$ e impossível se $q^2c \neq d$.

**Questão 20 (E):** A equação $\det(A - \lambda I_3) = 0$ equivale a

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^3 - (2 - \lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0.$$

de modo que $\lambda_1 = 2$ e

$$\lambda_{0,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 1 \text{ ou } 3.$$

Assim:

- Como

$$A - \lambda_0 I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq B.$$

então a afirmação I é falsa;

- Como

$$(A - \lambda_1 I_3)A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq B.$$

então a afirmação II é falsa;

- Como

$$A(A - \lambda_2 I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

então a afirmação III é verdadeira.

**Questão 21 (D):** Invertendo a função secante e tomando a tangente do resultado, a equação do enunciado se torna equivalente a

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1+e^x} - \operatorname{arc\,tg}(1-e^x)\right] = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,sec}\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ \Rightarrow\ & \frac{\frac{1}{1+e^x} - (1-e^x)}{1 + \frac{1}{1+e^x}(1-e^x)} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,sec}\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ \Rightarrow\ & \frac{1-(1+e^x)(1-e^x)}{(1+e^x)+(1-e^x)} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,sec}\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \\ \Rightarrow\ & \frac{e^{2x}}{2} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,sec}\frac{\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

onde

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Logo, devemos ter

$$e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x \in [-1, 1].$$

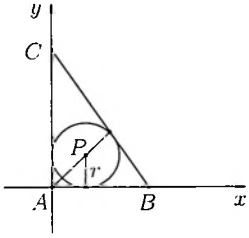
**Questão 22 (D):** Lembrando que $\log_{1/a} x = -\log_a x$, então a inequação dada é equivalente a

$$-\log_a\left[(x-7)\log_a\frac{1}{a}\right] \leq -\log_a(x-1) \Rightarrow -\log_a(7-x) \leq -\log_a(x-1)$$
$$\Rightarrow \log_a(7-x) \geq \log_a(x-1)$$
$$\Rightarrow 7-x \geq x-1$$
$$\Rightarrow x \leq 4.$$

dado que

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 7-x>0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x \leq 4.$$

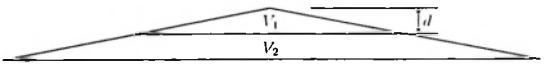
**Questão 23 (A):**




A bissetriz do ângulo em $A$ é a reta $y = x$, de modo que, se $r$ é o raio da circunferência circunscrita, o incentro do triângulo $\triangle ABC$ é da forma $P = (r, r)$, com $0 < r < 2$. Logo, devemos ter

$$S_{ABC} = \frac{(AB+AC+BC)r}{2} = \frac{AB\times AC}{2} \Rightarrow r = \frac{2\times 3}{2+3+\sqrt{13}} = \frac{6}{5+\sqrt{13}}$$
$$\Rightarrow 2r = \frac{12}{5+\sqrt{13}}.$$

**Questão 24 (B):**




Sejam $V_1$ e $V_2$ os volumes do cone seccionado e do tronco, respectivamente. Assim, do enunciado, tem-se

$$\begin{aligned} V_2^2 = V_1(V_1 + V_2) &\Rightarrow V_2^2 - V_1V_2 - V_1^2 = 0 \\ &\Rightarrow V_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} V_1 \\ &\Rightarrow V_2 + V_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} V_1 \\ &\Rightarrow \frac{V_1}{V_1+V_2} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{d}{1}\right)^3 \\ &\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \text{ cm.} \end{aligned}$$

**Questão 25 (B):** Sejam $h$ e $h'$ as alturas das faces laterais da pirâmide e do tronco, respectivamente. Com isso, as áreas laterais da pirâmide $S_p$ e do tronco $S_t$ são dadas por

$$\begin{cases} S_p = 4 \times \frac{2a \times h}{2} = 4ah \\ S_t = 4 \times \frac{(2a+a)h'}{2} = 6ah' \end{cases} \Rightarrow 2h = 3h'.$$

Além disso, se $H$ é altura do tronco e da pirâmide, devemos ter

$$\begin{cases} h = \sqrt{H^2 + a^2} \\ h' = \frac{1}{2}\sqrt{(2H)^2 + a^2} \end{cases}$$

e assim

$$\begin{aligned} 2\sqrt{H^2+a^2} = \frac{3}{2}\sqrt{(2H)^2+a^2} &\Rightarrow 16(H^2+a^2) = 9(4H^2+a^2) \\ &\Rightarrow 20H^2 = 7a2 \\ &\Rightarrow H = a\sqrt{\frac{7}{20}} = \frac{a\sqrt{35}}{10} \text{ cm.} \end{aligned}$$

# II.18 Vestibular 1996

**Questão 01 (B):** Pela sua definição,

$$A = \begin{bmatrix} \log_a(3a) & \log_{10}(3a)^2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

de modo que a característica de $A$ é máxima (e, no caso, igual a 2), se

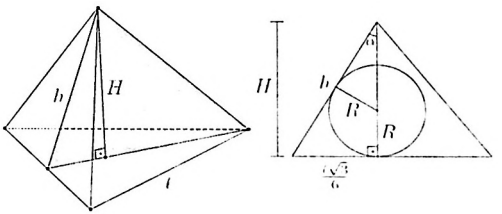
$$\log_a(3a) \neq \log_{10}(3a)^2 \Rightarrow \log_a(3a) \neq 2\,\frac{\log_a(3a)}{\log_a 10} \Rightarrow \begin{cases} \log_a(3a) \neq 0 \\ \log_a 10 \neq 2 \end{cases}.$$

ou seja, $a \neq \frac{1}{3}$ e $a \neq \sqrt{10}$.

**Questão 02 (A):**

- Como $(B \cup A^C)^C = (A \setminus B)$, então a afirmação I é verdadeira;
- Como $(A \setminus B^C) = (B \setminus A^C) = A \cap B$, então a afirmação II é falsa;
- Como $(A^C \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, então $(A^C \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, de modo que $[(A^C \setminus B) \cap (B \setminus A)]^C$ é o próprio conjunto $\mathbb{R}$, e a afirmação III é falsa.

**Questão 03 (C):**




No triângulo em destaque da figura acima, têm-se

$$H^2 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow h^2 = H^2 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\ell^2}{12} = \frac{\ell^2(3\sqrt{3}+1)}{12}.$$

de modo que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{h} = \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}+1}}.$$

e assim

$$H = R + \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \frac{H}{R} = 1 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = 1 + \sqrt{3\sqrt{3}+1}.$$

**Questão 04 (B):**

- De fato,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n,$$

e a afirmação I é verdadeira;

- De fato,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k},$$

e a afirmação II é verdadeira;

- Se a ordem não for importante, na verdade, há $\binom{50}{44}$ possibilidades de escolher 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 e $\binom{50}{6}$ possibilidades do que escolher 6 números diferentes entre os inteiros de 1 a 50. Logo, pelo item anterior, os dois processos têm o mesmo número de possibilidades, e a afirmação III é falsa.

**Questão 05 (B):** Observando que $z = 0$ e $z = -2$ são raízes, podemos decompor $p(z)$ na forma

$$p(z) = z(z+2)(z^2 + 3z^2 + 4).$$

e as demais raízes de $p(z)$ são tais que

$$z^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} < 0,$$

de modo que as demais raízes são complexas.

**Questão 06 (C):** Multiplicando a primeira equação por $\cos a$, a segunda por $\operatorname{sen} a$ e subtraindo as equações resultantes, têm-se

$$\begin{cases} (\operatorname{sen} a \cos a)x_0 - (\cos^2 a)y_0 = -\operatorname{sen} a \\ (\operatorname{sen} a \cos a)x_0 + (\operatorname{sen}^2 a)y_0 = -\operatorname{sen} a \end{cases} \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow x_0 \cdot y_0 = 0.$$

**Questão 07 (B):** Se $q$ é a razão da progressão geométrica dada, do enunciado, devemos ter

$$\begin{cases} x_2 = x_1 q \\ x_3 = x_1 q^2 \\ x_4 = x_1 q^3 \\ x_5 = x_1 q^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_2) = f(x_1) + f(q) \\ f(x_3) = f(x_1) + 2f(q) \\ f(x_4) = f(x_1) + 3f(q) \\ f(x_5) = f(x_1) + 4f(q) \end{cases}.$$

Da propriedade básica de $f(x)$, com $y = \frac{1}{x}$, tem-se

$$f(x.\frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x).$$

Logo,

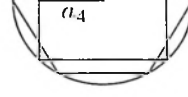
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 5f(x_1) + 10f(q) = 13f(2) - 2f(x_1) \\ \sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = f(x_1) - f(x_5) = -4f(q) = -2f(2x_1) = -2(f(2) - f(x_1)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3f(x_1) + 10f(q) = 13f(2) \\ 2f(x_1) - 4f(q) = -2f(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(q) = f(2).$$

Dessa forma, como $f(x)$ é injetora, têm-se $x_1 = q = 2$.

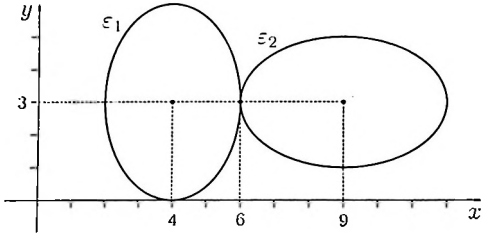
**Questão 08 (A):**




Se $a_6$ e $a_4$ são os apótemas do hexágono e do quadrado, respectivamente, a distância $d$ desejada é dada por $d = a_6 - a_4$, onde

$$\begin{cases} a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \\ a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow d = \frac{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2}.$$

**Questão 09 (D):**




Reescrevendo $E_1$ como

$$9(x^2-8x+16)-144+4(y^2-6y+9)-36+144=0 \Rightarrow \frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-3)}{9}=1,$$

concluímos que $E_1$ corresponde a uma elipse de centro $(4,3)$, semi-eixos $a=3$ e $b=2$, com o eixo menor sobre a reta $y=3$. Dessa forma, a elipse $E_2$ também tem semi-eixos $a=3$ e $b=2$, o eixo maior sobre a reta $y=3$, de modo que ela tangencia $E_1$ no ponto $(6,3)$ e, portanto, tem centro no ponto $(9,3)$.

**Questão 10 (E):** Reescrevendo as parábolas nas formas

$$\begin{cases} p_1: y=-(x^2+4x+4)+4-1 \\ p_2: y=(x^2-3x+\frac{9}{4})-\frac{9}{4}+\frac{11}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1: y=-(x+2)^2+3 \\ p_2: y=(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2} \end{cases},$$

podemos concluir que $V_1=(-2,3)$ e $V_2=(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$, de modo que a reta $r$ é dada por

$$\begin{cases} 3=-2\alpha+\beta \\ \frac{1}{2}=\frac{3}{2}\alpha+\beta \end{cases} \Rightarrow r: y=-\frac{5}{7}x+\frac{11}{7}.$$

Logo, a reta $p$, perpendicular a $r$ e que passa pela origem, é descrita por $p: y=\frac{7}{5}x$, cuja interseção $I=(x_o,y_o)$ com $r$ é dada por

$$\begin{cases} y_o=-\frac{5}{7}x_o+\frac{11}{7} \\ y_o=\frac{7}{5}x_o \end{cases} \Rightarrow I=(\frac{55}{74},\frac{77}{74}).$$

Dessa forma, a distância $d$ da reta $r$ à origem $O$ é igual a

$$d=IO=\frac{\sqrt{5^2\times 11^2+7^2\times 11^2}}{74}=\frac{11\sqrt{74}}{74}.$$

**Questão 11 (E):** Lembrando que $x > 0$, a solução da inequação dada é tal que

$$\log_a \left[\log_a (x^2 - 15)\right] < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 15 > 0 \\ \log_a (x^2 - 15) > 0 \\ \log_a (x^2 - 15) < a^0 = 1 \end{cases},$$

e assim

$$a^0 < x^2 - 15 < a^1 \Rightarrow 16 < x^2 < 15 + a \Rightarrow 4 < x < \sqrt{15 + a}.$$

Logo, devemos ter

$$\sqrt{15 + a} = 5 \Rightarrow a = 10.$$

**Questão 12 (D):** Da segunda equação, tem-se

$$(x - 2y)(x + 2y) = 4 \Rightarrow x + 2y = \frac{4}{x - 2y}.$$

e, assim, devemos ter

$$\log_2 \frac{4}{x - 2y} - \log_3 (x - 2y) = 2 \Rightarrow \log_2 (x - 2y) = \log_3 (x - 2y)$$
$$\Rightarrow x - 2y = 1.$$

Substituindo esse resultado de volta na segunda equação, têm-se

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 = 1 \\ x_0 + 2y_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2} \text{ e } y_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow x_0 + y_0 = \frac{13}{4}.$$

**Questão 13 (C):**

- Para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

têm-se $A \neq 0$ e $\det A = 0$, de modo que $A$ é não nula mas não possui inversa, e a opção (A) é falsa;

- A propriedade correta é $(AB)^t = B^t A^t$. De fato, sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^t B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

e a opção (B) é falsa;

- Como $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$, então a opção (C) é verdadeira;

- Seja $A = I$, de modo que $\det(A^2) = \det I = 1 \neq 2 \det A$, e a opção (D) é falsa;

- Desenvolvendo,

$$(A + B)(A - B) = A^2 \quad AB + BA - B^2,$$

que é diferente de $A^2 - B^2$ se $AB \neq BA$. Assim, sejam as matrizes $A$ e $B$ definidas na opção (A), tais que

$$(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix},$$

e a opção (E) é falsa.

**Questão 14 (E):** O produto $AB$ é inversível se e somente se $\det(AB) \neq 0$, ou seja,

$$\det A \times \det B = (3^{2a} - 1)(7^{a-1} \times 2^{-3} - 7 \times 8^{a-3}) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{2a} \neq 1 \\ 7^{a-2} / 8^{a-2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a(a-2) \neq 0.$$

**Questão 15 (D):** Sejam $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ os ângulos internos do triângulo do enunciado, tais que $\operatorname{cotg}\hat{A}$ e $\operatorname{cotg}\hat{B}$ são as raízes da equação dada. Logo, por Girard, têm-se

$$\begin{cases} \operatorname{cotg}\hat{A} + \operatorname{cotg}\hat{B} = a \\ \operatorname{cotg}\hat{A} \times \operatorname{cotg}\hat{B} = a + 1 \end{cases}$$

Com isso,

$$\operatorname{cotg}\hat{C} = \operatorname{cotg}[180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})] = \frac{\cos[180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})]}{\operatorname{sen}[180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})]} = \frac{-\cos(\hat{A} + \hat{B})}{\operatorname{sen}(\hat{A} + \hat{B})}$$

e assim

$$\operatorname{cotg}\hat{C} = -\frac{\cos\hat{A}\cos\hat{B} - \operatorname{sen}\hat{A}\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}\cos\hat{B} + \operatorname{sen}\hat{B}\cos\hat{A}} = \frac{1 - \operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}}{\operatorname{cotg}\hat{B} + \operatorname{cotg}\hat{A}} = \frac{1 - (a+1)}{a} = -1.$$

de modo que $\hat{C} = 135^\circ$.

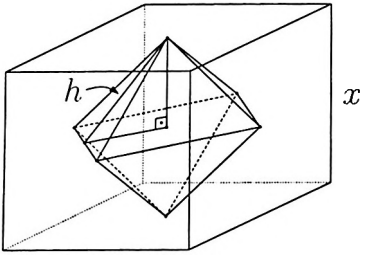
**Questão 16 (C):** Elevando $m$ ao quadrado e ao cubo, têm-se

$$\begin{aligned} m^2 &= \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \operatorname{sen}2\alpha \\ m^3 &= \operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + \cos^3\alpha \\ &= \operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) + \cos^3\alpha \\ &= \operatorname{sen}^3\alpha + \frac{3}{2}m\operatorname{sen}2\alpha + \cos^3\alpha. \end{aligned}$$

de modo que

$$y = \frac{m^2 - 1}{m^3 - \frac{3}{2}m(m^2 - 1)} = \frac{2(m^2 - 1)}{2m^3 - 3m^3 + 3m} = \frac{2(m^2 - 1)}{m(3 - m^2)}.$$

**Questão 17 (B):**




O poliedro em questão é um octaedro, composto por duas pirâmides com aresta da base $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ e altura $\frac{x}{2}$. Logo, a altura $h$ de uma face lateral do octaedro é tal que

$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2x^2}{8} + \frac{x^2}{8}} = \frac{x\sqrt{6}}{4}.$$

Com isso, a razão entre o volume $V$ e a área total $S$ do octaedro é igual a

$$\frac{V}{S} = \frac{2 \times \frac{\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{x}{2}}{3}}{8 \times \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2} \times \frac{x\sqrt{6}}{4}}{2}} = \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{18} \text{ cm}.$$

**Questão 18 (C):** Seja $r$ a razão da progressão aritmética dada. Do enunciado, têm-se

$$(y - r) + y + (y + r) = 33 \Rightarrow \begin{cases} y = 11 \\ x + z = 22 \end{cases},$$

de modo que

$$2xy + 2xz + 2yz = 2y(x + z) + 2xz = 694 \Rightarrow xz = 347 - 11 \times 22 = 105,$$

e assim

$$xyz = 7 \times 11 \times 15 = 1155 \text{ cm}^3.$$

**Questão 19 (E):**

- Se cada pessoa pernoitar num hotel diferente, há $C_3^5 = 10$ opções para as escolhas dos três hoteis e $3! = 6$ permutações entre as pessoas, o que corresponde a 60 combinações, e a afirmação II é verdadeira;
- Se duas e apenas duas pessoas pernoitarem no mesmo hotel, há $C_2^5 = 10$ opções para as escolhas dos dois hoteis, 2 opções para escolher qual hotel fica com duas pessoas, e $C_2^3 = 3$ combinações para o grupo de duas pessoas, de modo que a terceira pessoa fica imediatamente definida, o que corresponde, novamente, a 60 combinações, e a afirmação III é verdadeira;
- Se as três pessoas ficam no mesmo hotel, há 5 opções nesse caso. Considerando as outras opções, vistas nos dois itens anteriores, há um total de 125 combinações possíveis, e a afirmação I é falsa.

**Questão 20 (A):** Observando que $\frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = e^{-i\frac{\pi}{4}}$, a potência $P$ desejada é igual a

$$P = e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 5} = e^{-i\frac{5\pi}{4}} = \left(\cos\frac{5\pi}{4} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

**Questão 21 (C):** Seja $q \neq 0$ a razão da progressão geométrica, de modo que o sistema dado é equivalente a

$$\begin{cases} a_1 x + a_1 q^2 y = 1 \\ a_1^2 q x + a_1^2 q^4 y = a_1 q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + q^2 y = 1 \\ qx + q^4 y = q \end{cases} \rightarrow x + q^2 y = 1.$$

de modo que o sistema é possível e indeterminado.

**Questão 22 (A):** Determinando $f(g(x))$, tem-se

$$f(g(x)) = \frac{1 + 2\left(\frac{x}{1-2x}\right)}{1 - \left(\frac{x}{1+2x}\right)^2} = \frac{(1+2x)[(1+2x) - 2x]}{(1+2x)^2 - x^2} = \frac{(1+2x)(1+1x)}{(1+x)(1+3x)}.$$

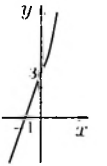
Assim, para termos $f(g(x)) < 0$, devemos ter

$$x \in (-1, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{1}).$$

**Questão 23 (B):** Reescrevendo $f(x)$, tem-se

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+1), & x \leq 0 \\ (x+2)^2 - 1, & x > 0 \end{cases},$$

que corresponde ao gráfico esboçado abaixo.



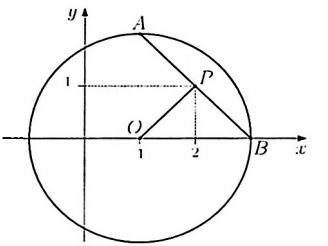

Logo, é simples perceber que $f(x)$ é bijetora e tal que

$$f(f(-\frac{2}{3})) = f(3(-\frac{2}{3}+1)) = f(1) = 1+4+3 = 8.$$

que corresponde a $f^{-1}(x_0)$, com $x_0 > 0$ tal que

$$f(8) = 64 + 32 + 4 = 99 = x_0.$$

**Questão 24 (C):**




Seja $P = (2,1)$ o ponto médio de uma corda $AB$ da circunferência de centro $O = (1,0)$ e raio $R = 2$. Logo, a reta $r$ suporte de $OP$ é tal que

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow r : y = x - 1,$$

de modo que a reta $ab$ suporte de $AB$, que é perpendicular a $OP$ e passa por $P$, é descrita por $ab : y = -x + 3$.

**Questão 25 (E):** Achando a(s) possível(is) interseção(ões) de $C'$ com $r$, têm-se

$$x^2 + 2x + (x + 1 + \sqrt{2})^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x(2 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})^2 = 0.$$

cujo discriminante $\Delta_1$ é dado por

$$\Delta_1 = 4(2 + \sqrt{2})^2 - 8(1 + \sqrt{2})^2 = 4[(1 + 4\sqrt{2} + 2) - 2(1 + 2\sqrt{2} + 2)] = 0.$$

de modo que $r$ e $C'$ são tangentes.

Achando a(s) possível(is) interseção(ões) de $C'$ com $s$, têm-se

$$x^2 + 2x + (-\sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 2x(4 - 2\sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})^2 = 0.$$

cujo discriminante $\Delta_2$ é dado por

$$\Delta_2 = 4(4 - 2\sqrt{3})^2 - 16(2 - \sqrt{3})^2 = 16(2 - \sqrt{3})^2 - 16(2 - \sqrt{3})^2 = 0.$$

de modo que $s$ e $C'$ são tangentes.

# II.19 Vestibular 1995

**Questão 01 (C):** Analisando os elementos $a_n$ de $A$ para diferentes valores de $n$, têm-se

$$\begin{cases} a_1 = \frac{-1}{1!} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{2!} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ a_3 = \frac{-1}{3!} + \operatorname{sen}\pi = -\frac{1}{6} \\ a_4 = \frac{1}{4!} + \operatorname{sen} 4\pi = \frac{1}{24} \\ \vdots \end{cases}$$

De fato, a partir de $n = 3$, a parcela do seno torna-se nula, enquanto a primeira parcela é sempre decrescente em módulo, de modo que a sequência $a_n$ é tal que $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $A \subset [-2, 2]$.

**Questão 02 (D):** Da definição do conjunto $K$, se $f(\pi/2) \in K$, então devemos ter $f(f(\pi/2)) = 0$, onde

$$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi} < \frac{\pi}{2},$$

pois $a > 0$. Dessa forma,

$$f(f(\pi/2)) = f(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}) = a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{a(\pi^2 - 2a)}{\pi} = 0.$$

de modo que

$$2a = \pi^2 \Rightarrow a = \frac{\pi^2}{2}.$$

**Questão 03 (E):** Seja $x > 1$ e $0 < y = \frac{1}{x} < 1$. Do enunciado,

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{x} > \frac{n(x-1)}{x} &\Rightarrow x^{n-1} > n(1 - x^{-1}) \\ &\Rightarrow x^{1-n} < [n(1 - x^{-1})]^{-1} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)^{1-n} < [n(1-y)]^{-1} \\ &\Rightarrow y^{n-1} < [n(1-y)]^{-1}. \end{aligned}$$

**Questão 04 (B):** Como $1+9=3+7=2\times 5$, cada número formado tem o seu "par" cuja soma é 111.110. Por exemplo, 15397 e 95713 formam um "par", pois $15397+95713=111.110$. Logo, a soma $S$ de todos os $5!$ possíveis números é

$$S = 111.110\times\frac{5!}{2} = 111.110\times 60 = 6.666.600 \Rightarrow 6\times 10^6 < S < 7\times 10^6.$$

**Questão 05 (A):** Analisando o desenvolvimento de

$$\begin{aligned}(1+i)^{4n} &= \binom{4n}{0}i^0+\binom{4n}{1}i^1+\binom{4n}{2}i^2+\binom{4n}{3}i^3+\ldots+\binom{4n}{4n-1}i^{4n-1}+\binom{4n}{4n}i^{4n}\\ &= \binom{4n}{0}+\binom{4n}{1}i-\binom{4n}{2}-\binom{4n}{3}i+\ldots-\binom{4n}{4n-1}i+\binom{4n}{4n}.\end{aligned}$$

podemos concluir que a expressão $E$ do enunciado equivale a

$$E = \mathrm{Re}\left[(1+i)^{4n}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{4n}\right] = 2^{2n}\,\mathrm{Re}\left[e^{in\pi}\right] = 2^{2n}(-1)^n.$$

**Questão 06 (C):** A soma $S$ da progressão geométrica de primeiro termo 0,3 e razão 0,1 é igual a

$$S = \frac{0.3}{1-0.1} = \frac{1}{3}.$$

de modo que a soma dos três termos da progressão aritmética de termo médio $a_2=\frac{1}{3}$ e razão $r$ vale

$$(a_2-r)+a_2+(a_2+r) = 3a_2 = 1.$$

**Questão 07 (D):** Seja a parábola $C=at^2+bt+c$, onde $C$ é a concentração medida no instante de tempo $t$. Da tabela, têm-se

$$\begin{cases} 3 = a+b+c \\ 5 = 4a+2b+c \\ 1 = 9a+3b+c \end{cases} \Rightarrow a=-3,\ b=11 \text{ e } c=-5.$$

de modo que

$$C(2.5) = -3(2.5)^2+11(2.5)-5 = -18.75+27.5-5 = 3.75.$$

**Questão 08 (E):** Do enunciado,

$$P(x) = (6x^2 + 5x + 3)(x^2 - x) - 7x,$$

de modo que

$$P(x) = q(x)(2x + 1) + c.$$

onde $c$ é uma constante tal que

$$c = P(-\frac{1}{2}) = \left[6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\right]\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] - 7\left(-\frac{1}{2}\right) = 5.$$

**Questão 09 (B):** Como os coeficientes do polinômio $p(x)$ dado são todos inteiros, então, se $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes, $4 - i\sqrt{2}$ e $-\sqrt{5}$ também devem ser raízes. Assim, $p(x)$ pode ser decomposto como

$$p(x) = 2(x^2 - 8x + 18)(x^3 - 3x^2 - 5x + 15) = 2(x^2 - 8x + 18)(x^2 - 5)(x - 3),$$

de modo que a soma $S$ dos quadrados de todas as raízes reais é

$$S = (\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{5})^2 + 3^2 = 19.$$

**Questão 10 (B):** Escrevendo $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais, devemos ter

$$\begin{aligned}(a + bi + i)^2 + |a - bi + i|^2 = 6 &\Rightarrow a^2 - (b+1)^2 + 2a(b+1)i + a^2 + (1-b)^2 = 6 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2a(b+1) = 0 \\ 2a^2 - 4b = 6 \end{cases} \\ &\Rightarrow b = -1 \text{ e } a = 1,\end{aligned}$$

pois $a > 0$. Com isso, $z = (1 - i) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$, de modo que $z^2 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2i$, e $n = 2$ é o menor natural tal que $z^n$ é imaginário puro.

**Questão 11 (C):** Se $z = 1$ é raiz da equação dada, então $z_1 + z_2 = 8$, e assim $z_1 = z_2 = 4$, pois $|z_1| = |z_2| = 4$. Logo, a equação dada é da forma

$$4(z^6 + z^3 - 2) = 0 \Rightarrow z^3 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -2 \text{ ou } 1.$$

Logo, a soma $S$ das raízes reais é

$$S = 1 - \sqrt[3]{2}.$$

**sIn:** As demais raízes da equação são $e^{\pm i\frac{4\pi}{3}}$ e $2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.

**Questão 12 (A):** Para que o sistema homogêneo seja indeterminado, o determinante de sua matriz característica deve ser nulo. Assim, usando a variável auxiliar $k = \log_3 a$, devemos ter

$$\begin{aligned} k^2(3-k) + 2 + 2 - 2k^2 - 2 - (3-k) = 0 &\Rightarrow -k^3 + k^2 + k - 1 = 0 \\ &\Rightarrow (k-1)(1-k^2) = 0 \\ &\Rightarrow k = \pm 1. \end{aligned}$$

de modo que

$$\log_3 a = \pm 1 \Rightarrow a = 3^{\pm 1} = 3 \text{ ou } \frac{1}{3} \Rightarrow S = \{\frac{1}{3}, 3\} \Rightarrow S \subset [-3, 3].$$

**Questão 13 (B):** Observando que $(\log_a b)(\log_b a) = 1$, então, usando a variável auxiliar $y = \log_3 x$, a expressão do enunciado é equivalente a

$$(2+y)(1+y) - 1 = (1+y) \Rightarrow y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = -2 \text{ ou } 0 \Rightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9},$$

pois $x \neq 1$. Logo, $x \in (0, \frac{1}{3})$.

**Questão 14 (E):** Como $B = P^{-1}AP$, então

$$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det[P^{-1}(\lambda I - A)P],$$

de modo que

$$\det(\lambda I - B) = \det^{-1}(P)\det(\lambda I - A)\det(P) = \det(\lambda I - A).$$

**Questão 15 (D):**

- Como os elementos da diagonal principal de uma matriz se mantêm, então $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$, e a afirmação I é verdadeira;
- Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tal que $\mathrm{tr}(A) = 0$ e $\det(A) = 2$, de modo que $A$ é inversível, e a afirmação II é falsa;

- O elemento da diagonal principal da matriz $M = (A + \lambda B)$ é da forma

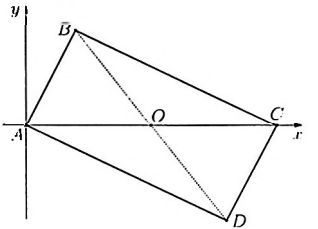
$$m_{kk} = (a_{kk} + \lambda b_{kk}).$$

para $k = 1, 2, 3$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{3} m_{kk} = \sum_{k=1}^{3} a_{kk} + \lambda \sum_{k=1}^{3} b_{kk} \Rightarrow \mathrm{tr}\,(M) = \mathrm{tr}\,(A) + \lambda\,\mathrm{tr}\,(B).$$

e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 16 (C):**




Na notação utilizada na figura acima, tem-se

$$AB^2 + BC^2 = (b^2 + 4b^2) + (16b^2 + 4b^2) = 25b^2 = AC^2,$$

de modo que $A\hat{B}C = 90^\circ$. Assim, sendo $O$ o ponto médio de $AC$, o quarto vértice $D$ do retângulo é o simétrico de $B$ em relação a $O$, ou seja,

$$D - O = O - B \Rightarrow D = 2O - B = 2(\frac{5}{2}, 0) - (b, 2b) = (4b, -2b).$$

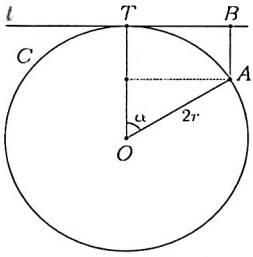
**Questão 17 (A):** A reta $t$, que tem coeficiente angular $2a$ e passa pelo ponto $(a, b)$, é descrita por $t : y = 2ax + (b - 2a^2)$, cujas interseções com os eixos cartesianos são tais que

$$\begin{cases} c = \frac{2a^2 - b}{2a} \\ d = (b - 2a^2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2a^2 - b}{2a} = -2(b - 2a^2) \Rightarrow (2a^2 - b)(4a - 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4},$$

pois $c = \frac{2a^2 - b}{2a} > 0$. Assim, como o ponto $(a, b)$ pertence à parábola dada, então,

$$b = (a^2 - 1) = -\frac{15}{16} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{15}{16}} = -\frac{4}{15}.$$

**Questão 18 (C):**




Na figura acima, como

$$\begin{cases} OT = 2r \\ AB = 2r - 2r\cos\theta \\ TB = 2r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

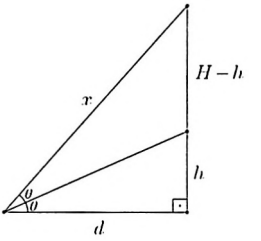
então a área $S$ do trapézio $OABT$ é dada por

$$S = \frac{OT + AB}{2}\,BT = 2r^2(2 - \cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta = r^2(4\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,2\theta).$$

**Questão 19 (D):** Desenvolvendo a expressão $E$ do enunciado usando a expressões do arco-dobro, têm-se

$$E = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1 + \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)} = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}.$$

**Questão 20 (A):**



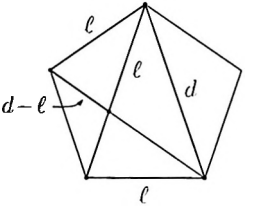

Na figura acima, por Pitágoras, tem-se

$$x = H^2 + d^2,$$

de modo que, pelo teorema das bissetrizes,

$$\begin{aligned}\frac{H-h}{x} = \frac{h}{d} &\Rightarrow (H-h)^2 d^2 = h^2(H^2+d^2)\\ &\Rightarrow H^2d^2 - 2Hhd^2 + h^2d^2 = H^2h^2 + h^2d^2\\ &\Rightarrow Hd^2 - 2hd^2 = Hh^2\\ &\Rightarrow H = \frac{2hd^2}{d^2-h^2}.\end{aligned}$$

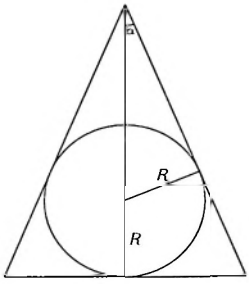
**Questão 21 (E):**




Considerando a semelhança dos dois triângulos em destaque na figura acima, onde $\ell = 1$, têm-se

$$\frac{d}{\ell} = \frac{\ell}{d-\ell} \Rightarrow d^2 - \ell d - \ell^2 = 0 \Rightarrow d^2 - d - 1 = 0.$$

**Questão 22 (A):**




Planificando o problema, conforme ilustrado na figura acima, onde

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{5}{13},$$

têm-se

$$R + \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} = H \Rightarrow R = \frac{H\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = \frac{12\times\frac{5}{13}}{1+\frac{5}{13}} = \frac{10}{3}\text{ cm}.$$

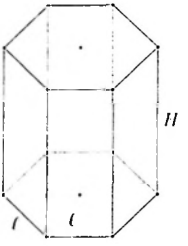
**Questão 23 (B):** Sejam o raio da base $r$ e a altura $h$ do cilindro tais que as áreas $S_s$ da seção e $S_b$ da base são dadas por

$$\begin{cases} S_s = 2rh \\ S_b = \pi r^2 \end{cases} \Rightarrow 2rh = \pi r^2 \Rightarrow h = \frac{\pi r}{2};$$

de modo que a área total $S$ do cilindro é igual a

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2(2+\pi) = 2{,}25\pi(2+\pi) = \frac{9(2+\pi)}{4}\text{ m}^2.$$

**Questão 24 (D):**



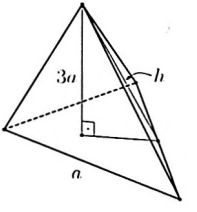

Se $H = 3$ e $\ell$ são, respectivamente, a altura e a aresta da base do prisma, conforme ilustrado na figura acima, as áreas lateral $S_\ell$ e da base $S_b$ desse sólido são tais que

$$\begin{cases} S_\ell = 6\ell H \\ S_b = 6\,\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow 6\ell H = 2\times\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{2H\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3},$$

de modo que o volume $V$ do prisma é igual a

$$V = S_b \times H = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

**Questão 25 (E):**




Se $h$ é a altura de uma face lateral da pirâmide, então, por Pitágoras, têm-se

$$h = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{1}{3}\times\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{327}}{6},$$

de modo que área total $S$ da pirâmide é igual a

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\,\frac{ah}{2} = \frac{a^2(\sqrt{3}+\sqrt{327})}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{4}\ \text{cm}^2.$$

# II.20 Vestibular 1994

**Questão 01 (C):** Do enunciado, devemos ter

$$x^2 + 2xyi - y^2 = (x+y)i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \text{ e } 2x^2 = 2x \\ \text{ou} \\ x = -y \text{ e } 2x^2 = 0 \end{cases}.$$

Logo, têm-se $x = y = 1$, pois $x \neq 0$, de modo que $x$ é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$.

**Questão 02 (B):**

- Usando a notação em coordenadas polares,

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{10} = \left(e^{i\theta}\right)^{10} = e^{i10\theta} = \cos(10\theta) + i\,\mathrm{sen}(10\theta),$$

  e a afirmação I é verdadeira;

- Desenvolvendo o lado esquerdo, têm-se

$$\frac{(5i)}{(2+i)} = \frac{(5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(5i)(2-i)}{4-i^2} = 2i - i^2 = 2i + 1,$$

  e a afirmação II é verdadeira;

- Desenvolvendo o binômio,

$$(1-i)^4 = 1 + 4(-i)^1 + 6(-i)^2 + 4(-i)^3 + (-i)^4 = 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4.$$

  e a afirmação III é verdadeira;

- Se $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais, então devemos ter

$$a^2 + 2abi - b^2 = a^2 - 2abi - b^2 \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \text{ ou } z \in \mathbb{I},$$

  e a afirmação IV é verdadeira;

- O polinômio $p(x)$ dado pode ser decomposto como

$$p(x) = (x^3 - 1)(x + 1) = (x^2 + x + 1)(x - 1)(x + 1).$$

  cujas raízes são $x = \pm 1$ e $x = -\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$, e a afirmação V é falsa.

**Questão 03 (E):** Do enunciado,

$$\begin{cases} f(g(x)) = m(x+m) + 1 = mx + m^2 + 1 \\ g(f(x)) = (mx+1) + m = mx + 1 + m \\ g(g(x)) = (x+m) + m = x + 2m \end{cases}.$$

e, assim:

- Como $0 < m < 1$, então $f(g(x)) \neq g(g(x))$, para todo $x$, e a afirmação I é falsa;
- Como $f(m) = m^2 + 1$ e $g(m) = 2m$, então $f(m) \neq g(m)$, e a afirmação II é falsa;
- Para termos $f(g(a)) = f(a)$, devemos ter $ma + m^2 + 1 = ma + 1$, o que é impossível, já que $0 < m < 1$, e a afirmação III é falsa;
- Para termos $g(f(b)) = mb$, devemos ter $mb + 1 + m = mb$, o que é impossível, já que $0 < m < 1$, e a afirmação IV é falsa;
- Como $g(g(m)) = 3m$ e $0 < m < 1$, então $0 < g(g(m)) < 3$, e a afirmação V é verdadeira.

**Questão 04 (D):** Uniformizando os denominadores, devemos ter

$$x^3 + 4 = (x^3 + 1) + a(x^2 - x + 1) + (bx + c)(x + 1).$$

e assim, igualando os coeficientes dos termos de mesma potência em $x$, têm-se

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ a + c = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1 \text{ e } c = 2 \Rightarrow a + b + c = 2.$$

**Questão 05 (D):** Sejam as raízes por $(r-1)$, $r$ e $(r+1)$ tais que

$$(r-1)^2 + r^2 + (r+1)^2 = 3r^2 + 2 = 14 \Rightarrow r = 2.$$

Logo, por Girard, têm-se

$$\begin{cases} (r-1) + r + (r+1) = 1 + 2 + 3 = -a \\ (r-1)r + r(r+1) + (r-1)(r+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + 1\times 3 = 11 = b \\ (r-1)r(r+1) = 1\times 2\times 3 = 6 = -c \end{cases},$$

de modo que

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-6)^2 + 11^2 + (-6)^2 = 193.$$

**Questão 06 (B):** Como os sinais de $P(-1)$ e $P(1)$ são opostos, pelo teorema de Rolle, há um número ímpar de raízes de $P(x)$ no intervalo $x \in ]-1,1[$. Além disso, como os coeficientes de $P(x)$ são reais e $i$ é raiz, então $-i$ também é raiz de $P(x)$, de modo que o número de raízes de $P(x)$ no intervalo $x \in ]-1,1[$ só pode ser 1.

**Questão 07 (A):** Há 3 possibilidades de escolha para as duas consoantes dentre as três disponíveis e 5 possibilidades para as quatro vogais dentre as cinco disponíveis. Há, ainda, 10 posições para as duas consoantes de modo que haja pelo menos uma vogal entre elas:

$$CVCVVV, CVVCVV, CVVVCV, CVVVVC, VCVCVV,$$
$$VCVVCV, VCVVVC, VVCVCV, VVCVVC, VVVCVC.$$

Além disso, as consoantes podem assumir 2! ordens distintas e as vogais 4! ordens distintas, de modo que o total $T$ de possibilidades satisfazendo as condições do enunciado é igual a

$$T = 3 \times 5 \times 10 \times 2! \times 4! = 7200.$$

**Questão 08 (C):** Do enunciado, devemos ter

$$\frac{C_8^{10}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^8\left(\frac{2m}{3}\right)^2}{C_7^{10}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^7\left(\frac{2m}{3}\right)^3} = \frac{C_8^{10}\frac{3a^2}{2}}{C_7^{10}\frac{2m}{3}} = \frac{3}{8}\frac{9a^2}{4m} = \frac{27a^2}{32m} = \frac{9}{16} \Rightarrow a^2 = \frac{2m}{3}.$$

de modo que

$$A = \left(m + \frac{2m}{3}\right)^{10} = \left(\frac{5m}{3}\right)^{10} = (m^2+4)^5 \Rightarrow \frac{25m^2}{9} = m^2 + 4 \Rightarrow m = \frac{3}{2}.$$

Logo, $a = \sqrt{\frac{2m}{3}} = 1$ e $a + m = \frac{5}{2}$.

**Questão 09 (E):** Escrevendo a progressão geométrica em função do seu termo central $a_{\frac{n+1}{2}} = 2^5$, têm-se

$$\frac{2^5}{q^{\frac{n-1}{2}}}, \ldots, \frac{2^5}{q^2}, \frac{2^5}{q}, 2^5, 2^5 \times q, 2^5 \times q^2, \ldots, 2^5 \times q^{\frac{n+1}{2}},$$

cujo produto $P$ dos termos é tal que

$$P = (2^5)^n = 2^{25} \Rightarrow n = 5.$$

de modo que o termo central é $a_3 = 2^5$. Logo, a soma $S$ dos $(n-1) = 4$ primeiros termos da progressão é dada por

$$S = \frac{2^5}{q^2}(1 + q + q^2 + q^3) = 2(1+q)(1+q^2) \Rightarrow q = 2^2 = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 2,$$

e assim $(a_1 + q + n) = (2 + 4 + 5) = 11$.

**Questão 10 (D):** Denotando

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

então, pelo enunciado, devemos ter

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = (ad-bc) - \lambda^2,$$

de modo que

$$(a+d)\lambda = 2\lambda^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = \frac{a+d}{2} = \frac{T}{2} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{T}{2}.$$

**Questão 11 (C):** Como $PP^t = I = P^tP$, então $P^t = P^{-1}$, pois a inversa de $P$ é a única matriz que satisfaz a propriedade $P^{-1}P = PP^{-1} = I$. Com isso,

$$\det B = \det(P^tAP) = \det(P^{-1}AP) = \det^{-1} P \times \det A \times \det P = \det A.$$

**Questão 12 (E):**

- Como $B = I - A$ e $A^2 = A$, então

$$B^2 = (I-A)^2 = I^2 - 2A + A^2 = I - 2A + A = I - A = B.$$

  e a afirmação I é verdadeira;
- Como $B = I - A$ e $A^2 = A$, então

$$\begin{cases} AB = A(I-A) = AI - A^2 = A - A = 0 \\ BA = (I-A)A = IA - A^2 = A - A = 0 \end{cases}$$

  e a afirmação II é verdadeira;
- Do item anterior, $AB = 0$, de modo que

$$\det A \times \det B = 0 \Rightarrow \det B = 0.$$

  pois $A$ é inversivel, e a afirmação III é falsa;
- Como $B = I - A$ e $A^2 = A$, então, do item II, $AB = BA = 0$ e assim

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2.$$

  e a afirmação IV é verdadeira;
- Do item II, $AB = 0$, e a afirmação V é verdadeira.

**Questão 13 (B):** Do enunciado,

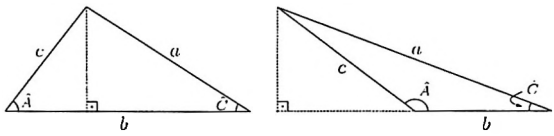
$$\begin{cases} y^2 = x^{-y} \\ xy = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow x^2x^{-y} = x^{-1} \Rightarrow 2 - y = -1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x^{-3} = 3^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}},$$

de modo que $0 < x, y < 4$.

**Questão 14 (C):** Desenvolvendo a expressão $E$ dada, têm-se

$$E = \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{4\,\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2}{\cos^4 x}} = \frac{1 - 4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{\cos^2 2x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 2x} = 1.$$

**Questão 15 (A):**




Se $r$ é a razão da progressão aritmética $a$, $b$, $c$, então

$$a + b + c = (b - r) + b + (b + r) = 3b = 15 \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ a + c = 10 \end{cases}.$$

Além disso, em um triângulo qualquer, mesmo obtusângulo, tem-se $b = (c\cos\hat{A} + a\cos\hat{C})$, como ilustrado na figura acima, e assim, do enunciado, devemos ter

$$b(c\cos\hat{A} + a\cos\hat{C}) + ac\cos\hat{B} = b^2 + ac\cos\hat{B} = \frac{77abc}{240}$$

$$\Rightarrow 2ac\cos\hat{B} = 2\times\left(\frac{77abc}{240} - b^2\right) = \frac{77ac}{24} - 50.$$

e, pela lei dos cossenos,

$$2ac\cos\hat{B} = a^2 + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - 2ac - b^2 = 10^2 - 2ac - 25 = 75 - 2ac.$$

Igualando as duas expressões acima para $2ac\cos\hat{B}$, têm-se

$$\frac{77ac}{24} - 50 = 75 - 2ac \Rightarrow ac = 24 \Rightarrow \begin{cases} \cos\hat{B} = \frac{75-2ac}{2ac} = \frac{9}{16} \\ \operatorname{sen}\hat{B} = \sqrt{\frac{16^2-9^2}{16^2}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \end{cases}.$$

de modo que a área $S$ do triângulo $\Delta ABC$ é dada por

$$S = \frac{ac\operatorname{sen}\hat{B}}{2} = \frac{24\times\frac{5\sqrt{7}}{16}}{2} = \frac{15\sqrt{7}}{4}\ \text{cm}^2.$$

**sln:** Por curiosidade, $a = 4$ e $c = 6$ ou vice-versa.

**Questão 16 (A):** Do enunciado,

$$\begin{aligned} a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 = 13a + 12 &\Rightarrow a^5 + a^4 + a^3 + a^2 - 12a - 12 = 0 \\ &\Rightarrow a^4(a+1) + a^2(a+1) - 12(a+1) = 0 \\ &\Rightarrow (a^4 + a^2 - 12)(a+1) = 0 \\ &\Rightarrow a^4 + a^2 - 12 = 0 \\ &\Rightarrow a^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \\ &\Rightarrow a = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

pois $a > 0$. Logo, mudando a base dos logaritmos para 3, a expressão em $x$ do enunciado é equivalente a

$$\frac{\log_3 a + \log_3 b + \log_3 c + \log_3 d + \log_3 e}{\log_3 x} = \frac{(1+2+3+4+5)\log_3 a}{\log_3 x} = \frac{15}{2\log_3 x} = \frac{5}{2},$$

de modo que $x = 3^3$.

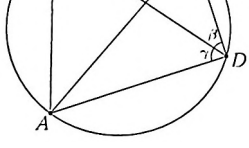
**Questão 17 (E):** Para que o sistema não homogêneo seja possível e determinado, o determinante $D$ de sua matriz característica deve ser não nulo. Assim, usando a variável auxiliar $k = 3^a$, devemos ter

$$D = 9k^4 - 24k^2 + 15 = 9(k^2 - 1)\left(k^2 - \frac{5}{3}\right) \neq 0.$$

ou seja,

$$\begin{cases} 3^{2a} \neq 1 \\ 3^{2a} \neq \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \neq 0 \\ 2a + 1 \neq \log_3 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 = \log_3 1 \\ a \neq \frac{-1+\log_3 5}{2} \end{cases}.$$

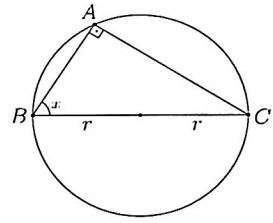
**Questão 18 (B):**




Na figura acima,

$$\alpha = \gamma \Rightarrow x = \alpha + \beta = \gamma + \beta = (180^\circ - A\hat{B}C) = 110^\circ.$$

**Questão 19 (B):**




No triângulo dado, têm-se

$$\begin{cases} AB = 2r\cos x \\ AC = 2r\operatorname{sen} x \end{cases} \Rightarrow S = \frac{AB \times AC}{2} = 2r^2 \cos x \operatorname{sen} x = r^2 \operatorname{sen} 2x.$$

**Questão 20 (X):** Tecnicamente, se $(ax + by + c) = 0$, então, para qualquer $k$, tem-se $k(ax + by + c) = 0$, de modo que a soma dos coeficientes da reta pode, na verdade, assumir qualquer valor $k(a + b + c)$, e a questão deve ser anulada.

Tirando esse "detalhe", para exercitar o leitor interessado, considere $P = (x_p, 2 - 2x_p) \in s$. Nesse caso, a reta $t$, perpendicular a $r$ e passando por $P$, pode ser descrita por $t : 3y + 4x + (2x_p - 6) = 0$, cuja interseção $I = (x_i, y_i)$ com a reta $r$ é caracterizada por

$$\begin{cases} r : 3x - 4y - 3 = 0 \\ t : 3y + 4x + (2x_p - 6) = 0 \end{cases} \Rightarrow I = \left( \frac{33 - 8x_p}{25}, \frac{6(1 - x_p)}{25} \right).$$

Logo, a distância do ponto $P$ à reta $r$ é tal que

$$PI^2 = \left( \frac{33 - 8x_p}{25} - x_p \right)^2 + \left[ \frac{6(1 - x_p)}{25} - (2 - 2x_p) \right]^2 = \frac{(33^2 + 44^2)(1 - x_p)^2}{25^2} = 22^2,$$

e assim

$$\frac{(3^2 + 4^2)11^2(1 - x_p)^2}{25^2} = \frac{11^2(1 - x_p)^2}{25} = 22^2 \Rightarrow x_p = 1 + 10 = 11,$$

de modo que a reta $p$, paralela à reta $r$ e passando por $P = (11, -20)$, pode ser descrita por $p : 3x - 4y - 113 = 0$.

**Questão 21 (C):** Seja $C = (x_c, y_c)$. Como o triângulo $\Delta ABC$ é equilátero, então $AC^2 = BC^2$, e assim

$$\begin{aligned}
&x_c^2 + (y_c - 3)^2 = (x_c - 3\sqrt{3})^2 + y_c^2 \\
\Rightarrow\ &x_c^2 - (x_c - 3\sqrt{3})^2 = y_c^2 - (y_c - 3)^2 \\
\Rightarrow\ &\Big[x_c - (x_c - 3\sqrt{3})\Big]\Big[x_c + (x_c - 3\sqrt{3})\Big] = [y_c - (y_c - 3)][y_c + (y_c - 3)] \\
\Rightarrow\ &3\sqrt{3}(2x_c - 3\sqrt{3}) = 3(2y_c - 3) \\
\Rightarrow\ &y_c = \sqrt{3}\,x_c - 3.
\end{aligned}$$

Além disso, tem-se $AC^2 = AB^2$, de forma que

$$\begin{aligned}
&x_c^2 + [(\sqrt{3}\,x_c - 3) - 3]^2 = (3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 36 \\
\Rightarrow\ &x_c^2 + 3x_c^2 - 12\sqrt{3}\,x_c + 36 = 36 \\
\Rightarrow\ &x_c = 3\sqrt{3} \text{ e } y_c = \sqrt{3}\,x_c - 3 = 6.
\end{aligned}$$

Logo, o centro $O$ da circunferência circunscrita é dado por

$$O = \frac{A + B + C}{3} = \left(\frac{0 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 0 + 6}{3}\right) = (2\sqrt{3}, 3),$$

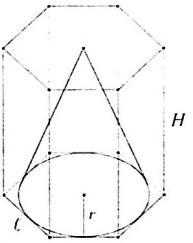
de modo que

$$r = \sqrt{OA} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2\sqrt{3}.$$

e assim

$$a^2 + b^2 + r^2 = (2\sqrt{3})^2 + 3^2 + (2\sqrt{3})^2 = 33.$$

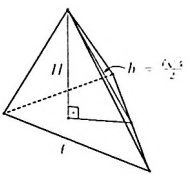
**Questão 22 (D):**




Como a altura $H$ é a mesma para os dois sólidos, o seu valor não influencia na razão dos respectivos volumes. Observando que o raio $r$ da base do cone é o apótema do hexágono circunscrito de lado $\ell$, então $r = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e assim

$$\frac{V_p}{V_c} = \frac{6 \times \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times H}{\frac{\pi r^2 \times H}{3}} = \frac{9\ell^2\sqrt{3}}{2\pi\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}.$$

**Questão 23 (A):**




A área total $S$ de um tetraedro regular de aresta $\ell$ é tal que

$$S = 4 \times \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \ell = \sqrt{6}.$$

de modo que a altura $H$ desse tetraedro é dada por

$$H = \sqrt{\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9} \times \frac{3\ell^2}{4}} = 2 \text{ cm}.$$

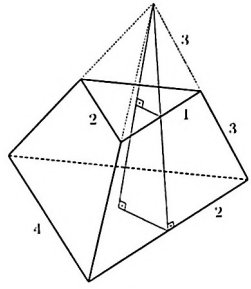
**Questão 24 (E):** Seja $q$ a razão da progressão aritmética $\pi$, $h$, $r$, tal que

$$(h-q)+h+(h+q)=3h=6\pi \Rightarrow h=2\pi, q=\pi \text{ e } r=3\pi,$$

de modo que a área total $S$ deste cilindro é dada por

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r(r+h)=2\pi(3\pi)(5\pi)=30\pi^3 \text{ cm}^2.$$

**Questão 25 (A):**




Seja $P$ a pirâmide original à qual pertence o tronco dado. No caso, a altura $H_l$ da face lateral da pirâmide é dada por

$$H_l=\sqrt{(3+3)^2-2^2}=4\sqrt{2},$$

de modo que a altura $H_p$ da pirâmide é igual a

$$H_p=\sqrt{H_l^2-\left(\frac{1}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{32-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{92}{3}}=\frac{2\sqrt{69}}{3},$$

e a altura $h$ do tronco é tal que

$$\frac{H_p-h}{H_p}=\frac{2}{4}\Rightarrow h=\frac{H_p}{2}=\frac{\sqrt{69}}{3}\text{ cm}\Rightarrow\sqrt{7}\text{ cm}<h<\sqrt{8}\text{ cm}.$$

# II.21 Vestibular 1993

**Questão 01 (A):** Do enunciado,

$$a = |2 - 2\sqrt{3}i|^{10} = \left(\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}\right)^{10} = 4^{10} = 2^{20},$$

de modo que devemos ter

$$(4 \times 2^{20})^x = 2^{20} \Rightarrow 2^{22x} = 2^{20} \Rightarrow x = \frac{10}{11}.$$

**Questão 02 (C):** Seja $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais. Assim, devemos ter

$$a^2 + 2abi - b^2 = (2 + a) - bi \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 + a \\ b(2a + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \text{ e } a^2 - a - 2 = 0 \\ \text{ou} \\ a = -\frac{1}{2} \text{ e } b^2 = -\frac{5}{4} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ e } a = \frac{1 + \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \text{ ou } -1.$$

Logo, há suas soluções $z = 2$ e $z = -1$ distintas.

**Questão 03 (E):** Inicialmente, da definição de função logaritmo, devemos ter

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ (1 - x)x > 0 \\ (1 + x)x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1.$$

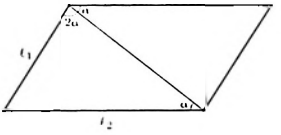
Para esse intervalo da base $x$ do logaritmo, a inequação do enunciado é equivalente a

$$(1 - x)x > (1 + x)x^2 \Rightarrow (1 - x) > (1 + x)x$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x - 1 < 0$$
$$\Rightarrow [x - (-1 + \sqrt{2})][x - (-1 - \sqrt{2})] < 0$$
$$\Rightarrow (-1 - \sqrt{2}) < x < (-1 + \sqrt{2}).$$

Assim, juntando todas as restrições, tem-se

$$0 < x < (\sqrt{2} - 1).$$

**Questão 04 (D):**




Pela lei dos senos, têm-se

$$\frac{\ell_1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\ell_2}{\operatorname{sen} 2\alpha} \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

**Questão 05 (E):** A equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = \cos y$ tem solução do tipo $x = \frac{\pi}{2} \pm y + 2k\pi$, com $k$ inteiro. Assim, para a equação do enunciado, devemos ter

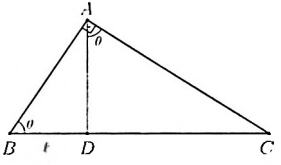
$$5x = \frac{\pi}{2} \pm 3x + 2k\pi \Rightarrow (5 \mp 3)x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 + 4k}{2(5 \mp 3)}\pi = \frac{(1 + 4k)\pi}{16} \text{ ou } \frac{(1 + 4k)\pi}{4},$$

que inclui o conjunto

$$x = \frac{(1 + 8k)\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

**Questão 06 (B):**




Do enunciado,

$$\begin{cases} AB = \frac{\ell}{\cos\theta} = \ell\sec\theta \\ AC = \frac{AD}{\cos\theta} = \frac{\ell\operatorname{tg}\theta}{\cos\theta} = \ell\operatorname{tg}\theta\sec\theta \end{cases},$$

de modo que a área $S_{ABC}$ do triângulo $\Delta ABC$ é dada por

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\ell^2\operatorname{tg}\theta\sec^2\theta}{2}.$$

**Questão 07 (B):** Como $f$ é uma função ímpar e periódica de período $p$, então

$$\begin{cases} f(0) = -f(0) = 0 \\ f(-x) = -f(x) = -f(x+p) \\ f(-x) = -f(x) = -f(x-p) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

e as afirmações II e IV são verdadeiras, enquanto que as afirmações I e III são falsas.

**Questão 08 (C):** Resolvendo o sistema, têm-se $x = 2$, $y = 1$ e $z = 3$, de modo que o sistema é determinado com $xyz = 6$.

**Questão 09 (A):** Para que duas matrizes sejam iguais, todos os seus respectivos elementos devem ser iguais, de modo que:

- Não é possível termos $A = B$, pois, para isso, deveríamos ter $x = 3$ e $x = 1$ simultaneamente, e a afirmação I é falsa;
- No caso,

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & x+3 & y \\ y & 16 & 4 \\ x+1 & 6 & x-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 16 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+3=5 \\ y=1 \\ x+1=3 \\ x-1=1 \end{cases},$$

  de modo que $x = 3$ e $y = 1$, e a afirmação II é verdadeira;

- No caso,

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

  e a afirmação III é falsa.

**Questão 10 (B):** Seja

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

de modo que

$$AB = \begin{bmatrix} (a+2d+3g) & (b+2e+3h) & (c+3f+3i) \\ a & b & c \\ (3a+g) & (3b+h) & (3c+i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 01 & \end{bmatrix}.$$

Logo, devemos ter

$$\begin{cases} a+2d+3g=1 \\ a=0 \\ 3a+g=0 \end{cases} \begin{cases} b+2e+3h=0 \\ b=1 \\ 3b+h=0 \end{cases} \begin{cases} c+3f+3i=0 \\ c=0 \\ 3c+i=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, d=\frac{1}{2}, g=0 \\ b=1, e=4, h=-3 \\ c=0, f=-\frac{3}{2}, i=1 \end{cases},$$

e assim

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i = 0+1+0+\frac{1}{2}+4-\frac{3}{2}+0-3+1 = 2.$$

**Questão 11 (D):** Usando Laplace na segunda linha, devemos ter

$$(-x)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ b & x & x \\ x & 2 & b \end{vmatrix} + (-x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & b & x \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$(-x)(-bx+4b-2x^2+2x+b^2-bx-2b^2-x^2) = 0$$
$$\Rightarrow (-x)[-3x^2+2x(1-b)+b(4-b)] = 0.$$

cuja soma $S$ das raízes, pelas relações de Girard, é tal que

$$S = -\frac{2(1-b)}{-3} = -\frac{8}{3} \Rightarrow 2-2b = -8 \Rightarrow b = 5.$$

Com isso, a equação dada é da forma

$$x(3x^2+8x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{6} = -\frac{5}{3} \text{ ou } -1 \end{cases} \Rightarrow S \subset [-10, 0].$$

**Questão 12 (A):** Do enunciado, avaliando a função em $t = 0$ e $t = 3$, têm-se

$$\begin{cases} f(0) = \frac{B}{1+C} = \frac{B}{65} \\ f(3) = \frac{B}{1+Ce^{-3k}} = \frac{B}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 64 \\ e^{-3k} = 2^{-3} \end{cases}$$

de modo que $e^k = 2$ e assim

$$f(t_0) = \frac{B}{1+C2^{-t_0}} = \frac{B}{5} \Rightarrow 1 + 64 \times 2^{-t_0} = 5 \Rightarrow 2^{-t_0} = 2^{-4} \Rightarrow t_0 = 4 \text{ horas.}$$

**Questão 13 (A):** Sejam $\overline{a}$ o termo central e $r$ a razão da progressão aritmética, que pode ser escrita da forma

$$(\overline{a} - nr), \ldots, (\overline{a} - 2r), (\overline{a} - r), \overline{a}, (\overline{a} + r), (\overline{a} + 2r), \ldots, (\overline{a} + nr).$$

de modo que as somas $S_p$ dos $n$ primeiros e $S_u$ dos últimos $n$ termos são respectivamente iguais a

$$\begin{cases} S_p = n\overline{a} - (n + \ldots + 2 + 1)r = n\overline{a} - \frac{(n+1)n}{2} r = 50 \\ S_u = n\overline{a} + (n + \ldots + 2 + 1)r = n\overline{a} + \frac{(n+1)n}{2} r = 140 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n\overline{a} = 95 \\ (n+1)nr = 90 \end{cases}$$

Logo, determinando $r$ inteiro para diferentes valores de $n$, têm-se

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow & r = 45 \\ n = 2 \Rightarrow & r = 15 \\ n = 5 \Rightarrow & r = 3 \\ n = 9 \Rightarrow & r = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 5 \text{ e } r = 3.$$

pois $n$ é ímpar e $2 < r < 13$, de modo que

$$\overline{a} = a_{n+1} = \frac{95}{n} = 19 \Rightarrow a_{2n+1} = \overline{a} + nr = 19 + 5 \times 3 = 34.$$

**Questão 14 (D):** Seja $a_1$ o primeiro termo comum às duas progressões. Do enunciado, devemos ter

$$\begin{cases} 5a_1 + (0 + 1 + 2 + 3 + 4)r = 50 \\ \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-r^2} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2r = 10 \\ a_1 = 12(1 - r^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 12r^2 - 2r - 2 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{24} = \frac{2 \pm 10}{24} = \frac{1}{2} \text{ ou } -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a_1 = 10 - 2r = 9 \text{ ou } \frac{32}{3}.$$

Logo, $r = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 9 < 10$, e a soma $S$ dos quatro primeiros termos da progressão geométrica é dada por

$$S = \frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(r^8 - 1)}{r^2 - 1} = \frac{9(2^{-8} - 1)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{9 \times 255 \times 1}{3 \times 256} = \frac{765}{64}.$$

**Questão 15 (B):** Pelas condições do problema, os vasos deverão conter necessariamente 7, 6 e 5 rosas. Além disso, como cada vaso deve conter pelo menos 2 rosas vermelhas e 1 amarela, sobram apenas 4 rosas vermelhas e 5 amarelas para serem distribuídas, de modo que os vasos devem receber exatamente 4, 3 e 2 rosas desse subconjunto de flores.

Vamos denotar um rosa vermelha por V e uma rosa amarela por A. Nesse caso, o vaso com mais rosas pode receber VVVV, VVVA, VVAA, VAAA ou AAAA rosas. Analisando cada caso separadamente:

- Quando o vaso recebe VVVV, sobram 5 A para serem distribuídas, com uma única possibilidade: (AAA,AA);
- Quando o vaso recebe VVVA, sobram 1 V e 4 A para serem distribuídas com duas possibilidades: (VAA,AA) e (AAA,VA);
- Quando o vaso recebe VVAA, sobram 2 V e 3 A para serem distribuídas com três possibilidades: (VVA,AA), (VAA,VA) e (AAA,VV);
- Quando o vaso recebe VAAA, sobram 3 V e 2 A para serem distribuídas com três possibilidades: (VVV,AA), (VVA,VA) e (VAA,VV);
- Quando o vaso recebe AAAA, sobram 4 V e 1 A para serem distribuídas com duas possibilidades: (VVV,VA) e (VVA,VV).

Logo, há um total de $(1 + 2 + 3 + 3 + 2) = 11$ arranjos distintos de flores.

**Questão 16 (D):**

- Nesse caso, a distribuição dos prêmios depende apenas da escolha das 5 pessoas premiadas no conjunto de 7 pessoas, o que corresponde a $C_5^7 = \frac{7!}{5! \times 2!} = 21$ possibilidades, e a afirmação I é verdadeira;
- Nesse caso, temos $C_4^7 = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35$ possibilidades para as 4 pessoas premiadas e $C_1^4 = 4$ possibilidades para a escolha da pessoa com dois prêmios, o que corresponde a um total de 140 possibilidades, e a afirmação II é verdadeira;
- De fato,

$$\binom{n}{5} = \frac{n!}{(n-5)! \times 5!} = \binom{n}{n-5},$$

e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 17 (D):** Forçando a antissimetria dos coeficientes, devemos ter

$$\begin{cases} a+b+c=6 \\ 6=3c \\ a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{8}{3}, b=\frac{1}{3} \text{ e } c=2.$$

de modo que o polinômio $p(x)$ dado equivale a

$$\begin{aligned} p(x) &= x^6 - 6x^5 + 6x^4 - 6x^2 + 6x - 1 \\ &= (x-1)(x^5 - 5x^4 + x^3 + x^2 - 5x + 1) \\ &= (x-1)(x^3+1)(x^2 - 5x + 1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 5x + 1). \end{aligned}$$

Logo, as raízes de $p(x)$ são

$$x = 1, -1, \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2},$$

das quais apenas 4 são reais.

**Questão 18 (X):** Como os coeficientes do polinômio $p(x)$ dado são reais, se $(1+3i)$ é raiz, então $(1-3i)$ também o é. Sejam $r_1 = \frac{r_2}{q}$, $r_2$ e $r_3 = r_2 q$ as raízes reais de $p(x)$ tais que

$$\frac{r_2}{q} \times r_2 \times r_2 q = 64 \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Logo, observando que $(1+3i)(1-3i) = 10$ e $r_2^2 = 16$, por Girard, têm-se

$$\begin{aligned} & 160q + 160 + \frac{160}{q} + 64(1+3i) + 64(1-3i) = 688 \\ \Rightarrow\ & 160q + \frac{160}{q} = 400 \\ \Rightarrow\ & 2q^2 - 5q + 2 = 0 \\ \Rightarrow\ & q = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2 \text{ ou } \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

de modo que $q = 2$, pois $q$ é inteiro, e assim, $r_1 = \frac{r_2}{q} = 2$ e $r_3 = r_2 q = 8$. Com isso, também por Girard, têm-se

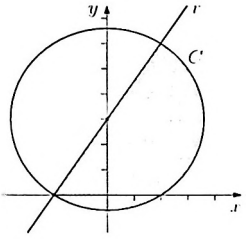
$$\begin{cases} p = -r_1 r_2 r_3 (1+3i)(1-3i) = -640 \\ m = -[r_1 + r_2 + r_3 + (1+3i) + (1-3i)] = -16 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{m} = \frac{-640}{-16} = 40.$$

Por outro lado, ainda por Girard, têm-se

$$\begin{aligned} \frac{2p}{m} &= r_1[r_2 + r_3 + (1+3i) + (1-3i)] + r_2[r_3 + (1+3i) + (1-3i)] \\ &\quad + r_3[(1+3i) + (1-3i)] + (1+3i)(1-3i) \\ &= 94. \end{aligned}$$

de modo que os dados do problema são inconsistentes.

**Questão 19 (C):**




Como a reta $r$ dada passa pelo centro $(0,3)$ da circunferência $C$ dada de raio $r = \sqrt{13}$, a região em questão corresponde à semi-circunferência de área

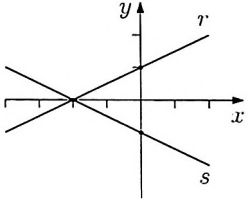
$$S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{13\pi}{2}.$$

**Questão 20 (E):** Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 1,$$

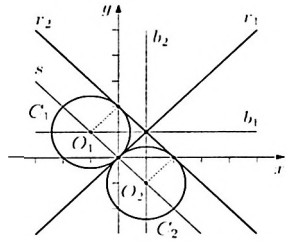
de modo que as três retas são concorrentes no ponto $(3,1)$.

**Questão 21 (D):**




A reta $r$ intercepta os eixos nos pontos $(-2,0)$ e $(0,1)$. Assim, a reta $s$ deve interceptas os eixos nos pontos $(-2,0)$ e $(0,-1)$, de modo que $s$ pode ser descrita por $s : x + 2y + 2 = 0$.

**Questão 22 (B):**



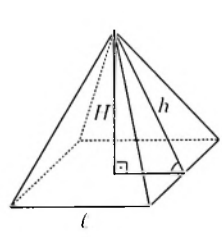

O centro da circunferência deve estar sobre uma das bissetrizes de $r_1$ e $r_2$. No caso, $r_1$ e $r_2$ são ortogonais, se interceptam no ponto $(1,1)$, e suas bissetrizes são descritas por $b_1 : x = 1$ e $b_2 : y = 1$.

Como o ponto $(0,0)$ pertence à reta $r_1$, a circunferência desejada deve tangenciar $r_1$ nesse ponto. Logo, o centro da circunferência está sobre a reta $s$, ortogonal a $r_1$ na origem, de modo que $s : x + y = 0$.

Assim, o centro $O$ da circunferência deve satisfazer

$$\begin{cases} O \in b_1 \text{ e } O \in s \\ \text{ou} \\ O \in b_2 \text{ e } O \in s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O = (1,-1) \\ \text{ou} \\ O = (-1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ \text{ou} \\ C_2 : (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}$$

**Questão 23 (B):**




Usando a notação da figura acima, têm-se

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}.$$

de modo que a área lateral da pirâmide vale

$$S_\ell = 4 \times \frac{h \times \ell}{2} = 64\sqrt{2}\ \text{m}^2.$$

**Questão 24 (C):** Se $\ell_1$ e $\ell_2$ são os respectivos comprimentos das arestas dos cubos $I$ e $II$, então

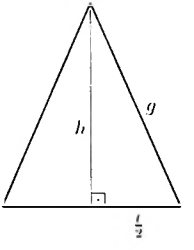
$$d_2 = \ell_2\sqrt{3} = 3 \Rightarrow \ell_2 = \sqrt{3},$$

de modo que

$$S_1 - S_2 = 6(\ell_1^2 - \ell_2^2) = 6(\ell_1^2 - 3) = 54 \Rightarrow \ell_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow d_1 = \ell_1\sqrt{3} = 6,$$

e assim $\frac{d_1}{d_2} = \frac{6}{3} = 2$.

**Questão 25 (E):**




Se $r$, $g$ e $h$ são, respectivamente, o raio, a geratriz e a altura do cone, então, do enunciado, devemos ter

$$\pi rg = 15\pi \Rightarrow g = \frac{15}{r} = 5 \Rightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2} = 4,$$

de modo que o volume $V$ do cone é dado por

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = 12\pi \text{ dm}^3.$$

# II.22 Vestibular 1992

**Questão 01 (C):** Pelas definições das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, têm-se

$$\begin{cases} f(g(x)) = 3^{x^2+\frac{1}{x^2}} \\ h(f(x)) = \frac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}} \end{cases}$$

de modo que a equação $f(g(x)) = h(f(x))$ equivale a

$$\begin{aligned} 3^{\frac{x^4+1}{x^2}} = 3^{4-\frac{x^2+1}{x}} &\Rightarrow \frac{x^4+1}{x^2} = 4 - \frac{x^2+1}{x} \\ &\Rightarrow x^4 + 1 = 4x^2 - x(x^2+1) \\ &\Rightarrow x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)(x^3 + 2x^2 - 2x + 1) = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)(x-1)(x^2 + 3x + 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ ou } \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ &\Rightarrow x \in [-6, 1]. \end{aligned}$$

**Questão 02 (A):** Da definição da função logaritmo, devemos ter

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \\ 3x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1)(x-\frac{1}{2}) > 0 \\ x(2x-3) \neq 0 \\ 3(x-1)(x-\frac{2}{3}) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 1 \\ x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{3}{2} \\ x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 1 \end{cases}.$$

de modo que

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty).$$

**Questão 03 (A):** Como as funções $f$ e $g$ são estritamente decrescentes, elas são também injetoras, e, consequentemente, bijetoras e inversíveis, de modo que $h$ é inversível. Além disso, usando a regra da cadeia,

$$h' = f' \times g' > 0,$$

de modo que $h$ é estritamente crescente e sua inversa é estritamente crescente, pois a inversa de uma função crescente também é crescente.

**Questão 04 (X):** Se $z^6 \in \mathbb{R}$, então, para $k$ inteiro,

$$\arg(z^6) = k\pi \Rightarrow \arg(z) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im}(a)+2}{\operatorname{Re}(a)} = \frac{k\pi}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{\operatorname{Im}(a)+2}{\operatorname{Re}(a)} = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{6} = \sqrt{3} \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

pois $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$. Para um valor complexo de $a$, porém, há infinitas soluções para a equação acima.

Se restringirmos o domínio de $a$ para o conjunto dos reais, o que não é explicitado no enunciado, teríamos

$$\frac{2}{a} = \sqrt{3} \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } 2\sqrt{3}.$$

cujo produto é igual a 4.

**Questão 05 (D):** Usando a notação em coordenadas polares, têm-se

$$w^5 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow w = 2^{\frac{1}{5}} e^{i\frac{\pi}{10}} \Rightarrow 32 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = 16\sqrt{2}(1+i) \Rightarrow \frac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 2.$$

de modo que a equação em $z$ do enunciado equivale a

$$z^4 - 2z^2 + 2 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$
$$\Rightarrow z = \pm\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ e } \pm\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$$
$$= \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{13\pi}{8}} \text{ e } \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

**Questão 06 (E):** O determinante $D$ do enunciado é igual a

$$D = 4xF^2(x) + 2F(x)G^2(x) + 8x^2G(x) - 4xG^2(x) - 8x^2F(x) - 2G(x)F^2(x)$$
$$= (G(x) - F(x))[4x^2 - 2x(F(x) + G(x)) + F(x)G(x)]$$
$$= (G(x) - F(x))(2x - F(x))(2x - G(x)).$$

Assim, como $D = 0$, então devemos ter:

- $G(x) = F(x)$ e assim

$$x(x^2-1) = x^4+x^3-x+1 \Rightarrow x^4 = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow x = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ ou } e^{i\frac{7\pi}{4}};$$

- $F(x) = 2x$ e assim

$$\begin{aligned} 2x^3 = x^4 + x^3 - x + 1 &\Rightarrow (x^3 - 1)(x - 1) = 0 \\ &\Rightarrow (x^2 + x + 1)(x - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ ou } \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}; \end{aligned}$$

- $G(x) = 2x$ e assim

$$2x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm i.$$

Logo, a raiz dupla $x = 1$ é a única raiz real da equação do enunciado.

**Questão 07 (C):** Observando que a equação do enunciado é recíproca de primeira espécie, podemos agrupar os termos em $x$ com mesmos coeficientes e re-escrever a equação da forma

$$\begin{aligned} & x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - (a + b)\left(x + \frac{1}{x}\right) + (ab + 2)\right] = 0 \\ \Rightarrow\ & x^2\left[\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - (a + b)\left(x + \frac{1}{x}\right) + ab\right] = 0 \\ \Rightarrow\ & x^2\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - (a + b)\left(x + \frac{1}{x}\right) + ab\right] = 0 \\ \Rightarrow\ & \left(x + \frac{1}{x}\right) = a \text{ ou } b. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $c = a$ ou $b$, devemos ter

$$x^2 - cx + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}.$$

de modo que todas as raízes da equação dada são reais se $a^2 > 4$ e $b^2 > 4$, ou, equivalentemente, se $|a| > 2$ e $|b| > 2$.

**Questão 08 (C):** Dos dados do problema, devemos ter

$$\begin{cases} a_1^2 q^{n-1} = 243 \\ \log_q(a_1 q^{n-1}) = (\log_q a_1) + (n-1) = 6 \\ \log_q\left(a_1^n q^{[0+1+\ldots+(n-1)]}\right) = n(\log_q a_1) + \frac{(n-1)n}{2} = 20 \end{cases}$$

de modo que

$$7 - n = \frac{20}{n} - \frac{n-1}{2} \Rightarrow n^2 - 13n + 40 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{2} = \frac{13 \pm 3}{2} = 5 \text{ ou } 8.$$

Testando esses valores no sistema original, têm-se

$$n = 5: \begin{cases} a_1^2 q^4 = 243 \\ \log_q a_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow q^8 = 243 = 3^5$$

$$n = 8: \begin{cases} a_1^2 q^7 = 243 \\ \log_q a_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow q^5 = 243 = 3^5$$

e assim $q = 3$, pois $q$ é inteiro, e, consequentemente, $a_1 = q^{-1} = \frac{1}{3}$. Logo, a soma $S_8$ dos $n = 8$ primeiros termos da progressão geométrica é igual a

$$S_8 = \frac{\frac{1}{3}(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{3^8 - 1}{6}.$$

**Questão 09 (E):** Seja $r$ a razão da progressão aritmética $a$, $b$, $c$, $d$. Para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter

$$\frac{4.2^a}{3^{a+3r}} = \frac{2^{a+2r}}{9.3^{a+r}} = \frac{\frac{2}{3}.2^{a+r}}{81} \Rightarrow \frac{2^{2+a}}{3^{a+3r}} = \frac{2^{a+2r}}{3^{2+a+r}} = \frac{2^{1+a+r}}{3^5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + a = a + 2r = 1 + a + r \\ a + 3r = 2 + a + r = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ e } r = 1,$$

de modo que

$$a + b + c + d = 2 + 3 + 4 + 5 = 14.$$

**Questão 10 (B):** Se o determinante de $A$ é nulo, o sistema $AX = Y$ é indeterminado ou impossível. Assim:

- Se $Y = 0$, o sistema é sempre possível, sendo, nesse caso, indeterminado. Com isso, sempre existe uma solução $X$ não nula tal que $AX = 0$, e a afirmação I é verdadeira;
- Dependendo do vetor $Y$, o sistema pode se tornar impossível, de modo que nem sempre existe um vetor $X$ tal que $AX = Y$ para qualquer $Y$, e a afirmação II é falsa;
- No caso, o vetor $[1 \quad 0 \quad 0]^t$ seleciona a primeira coluna de $A$, ou, equivalentemente, a primeira linha da matriz transposta de $A$, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 11 (C):** Do enunciado, devemos ter $X(X + 2I) = 0$, de modo que

$$\det X = 0 \text{ ou } \det(X + 2I) = 0.$$

Assim:

- Se $\det X \neq 0$, então $\det(X + 2I) = 0$, de modo que $(X + 2I)$ é não inversível, e a afirmação I é falsa;
- De fato, se $\det(X + 2I) \neq 0$, então $\det X = 0$, de modo que $X$ é não inversível, e a afirmação II é verdadeira;
- Se $\det X \neq 0$, então podemos inverter $X$ na equação $X(X + 2I) = 0$, obtendo $(X + 2I) = 0$, de modo que

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det X = 4 > 0,$$

e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 12 (B):** Como

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 7^n = 7^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 7^n (1-1)^n = 0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} 2^m = 2^m \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} = 2^m (1+1)^m = 2^{2m} \end{cases}$$

então a igualdade do enunciado é válida para qualquer natural $n$ e $m = 3$.

**Questão 13 (C):** O $n$-ésimo termo do desenvolvimento de $(x+y)^6$, ordenado segundo as potências decrescentes de $x$, é dado por $a_n = \binom{6}{7-n} x^{7-n} y^{n-1}$. Sendo assim, do enunciado, devemos ter

$$\binom{6}{5} x^5 y + \frac{1}{10}\binom{6}{3} x^4 y^3 = 8 \times 2^6 \Rightarrow 6 \times 2^{5(z+1)-2z+1} + 2 \times 2^{3(z+1)+4(-2z-1)} = 2^9$$

$$\Rightarrow 3 \times 2^{3z+7} + 2^{-3z+7} = 2^9$$

$$\Rightarrow 3 \times 2^{3z} + 2^{-3z} = 2^2$$

$$\Rightarrow 3(2^{3z})^2 - 4(2^{3z}) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2^{3z} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4+2}{6} = \frac{1}{3} \text{ ou } 1$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{3}\log_2 3 \text{ ou } 1$$

$$\Rightarrow z \in (-\infty, 0].$$

**Questão 14 (D):** Das propriedades da função logaritmo, têm-se

$$\alpha = \frac{\log \sqrt{2}}{\log \frac{2}{3}} = \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} = \sqrt{2}.$$

de modo que a desigualdade do enunciado equivale a

$$2^{\operatorname{sen} x} \leq 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right].$$

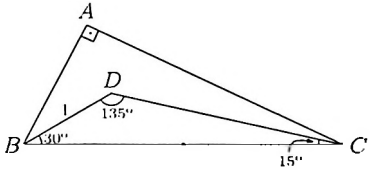
**Questão 15 (E):** A função $\cos x$ é decrescente no primeiro quadrante. Assim, como $\cos x > \cos y$, então $y > x$, de modo que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Além disso, desenvolvendo a expressão de $T$, têm-se

$$T = \sqrt{\frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{sen}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = \cos \alpha.$$

de modo que

$$T = \cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{11}}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{11}}{10}.$$

**Questão 16 (B):**




Do enunciado $D\hat{B}C = \frac{\hat{B}}{2} = 30°$ e $D\hat{C}B = \frac{\hat{C}}{2} = 15°$, de modo que $B\hat{D}C = 135°$. Logo, aplicando a lei dos senos no triângulo $\Delta BDC$, tem-se

$$\frac{BD}{\operatorname{sen} 15°} = \frac{BC}{\operatorname{sen} 135°} \Rightarrow BC = \frac{BD\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{sen}(45° - 30°)}.$$

e assim

$$BC = \frac{BD\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{sen} 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 30° \cos 45°} = \frac{BD\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2BD}{\sqrt{3}-1} = (\sqrt{3}+1)\ \text{cm}.$$

**Questão 17 (D):** Se $\operatorname{tg}\theta = m$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \end{cases}.$$

Além disso,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \operatorname{tg}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\operatorname{tg}^2\theta}}{2\operatorname{tg}\theta} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \frac{-\cos\theta \pm 1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

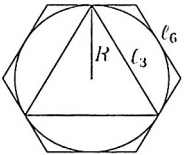
de modo que, como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}}{\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}} = \frac{\sqrt{m^2+1} - 1}{m}.$$

Com isso, a reta bissetriz de $y = mx$ com o eixo $x$ é descrita por

$$y = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, x = \frac{\sqrt{m^2+1} - 1}{m}\, x.$$

**Questão 18 (D):**




Sejam $\ell_6$ e $a_6$ o lado e o apótema do hexágono circunscrito à circunferência de raio $R$, que, por sua vez, circunscreve o triângulo de lado $\ell_3$. Assim,

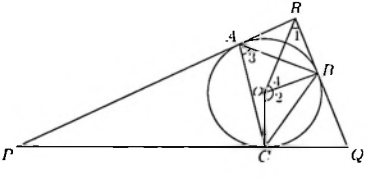
$$\begin{cases} R = a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \\ R = \frac{2}{3} \times \frac{\ell_3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \\ \ell_3 = R\sqrt{3} \end{cases}.$$

de modo que a razão entre as áreas do triângulo equilátero e do hexágono é dada por

$$\frac{S_3}{S_6} = \frac{\frac{\ell_3^2\sqrt{3}}{4}}{6 \times \frac{\ell_6^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{3R^2}{6 \times \frac{4R^2}{3}} = \frac{3}{8}.$$

**sln:** A razão entre as áreas independe do comprimento do apótema dado do hexágono.

**Questão 19 (A):**



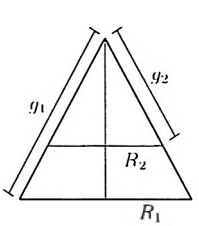

No triângulo $\Delta PQR$, têm-se

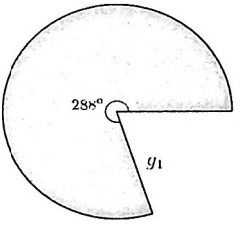
$\hat{P}+\hat{Q}+\hat{R} = (\hat{Q}-20^\circ)+\hat{Q}+(\hat{Q}+20^\circ) = 180^\circ \Rightarrow \hat{Q} = 60^\circ$, $\hat{P} = 40^\circ$ e $\hat{R} = 80^\circ$.

No quadrilátero $OARB$, têm-se $OA = OB$ e $RA = RB$, de modo que $\hat{1} = \frac{\hat{R}}{2} = 40^\circ$, e ainda, $\hat{4} = (90^\circ - \hat{1}) = 50^\circ$.

Já no quadrilátero $OBQC$, têm-se $O\hat{B}Q = O\hat{C}Q = 90^\circ$, de modo que $\hat{2} = (180^\circ - \hat{Q}) = 120^\circ$. Como $\hat{3}$ é ângulo inscrito na circunferência de centro $O$ relativo ao ângulo central $\hat{2}$, então $\hat{3} = \frac{\hat{2}}{2} = 60^\circ$.

**Questão 20 (B):**




Sejam $R_1$ e $g_1$ o raio da base e a geratriz do cone original, e $R_2$ e $g_2$ o raio da base e a geratriz do cone segmentado, respectivamente, conforme indicado na figura acima. Do enunciado,

$$\begin{cases} \frac{2\pi g_1}{360^\circ} = \frac{2\pi R_1}{288^\circ} \\ 2g_1 + 2R_1 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4g_1 = 5R_1 \\ \frac{5R_1}{2} + 2R_1 = 18 \end{cases} \Rightarrow R_1 = 4 \text{ e } g_1 = 5.$$

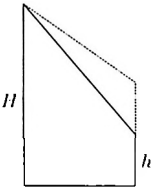
A razão das áreas das bases do tronco de cone é igual ao quadrado da razão dos raios ou das geratrizes dos cones segmentado e original. Assim,

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} 3R_2 = 2R_1 \\ 3g_2 = 2g_1 \end{cases} \Rightarrow R_2 = \frac{8}{3} \text{ e } g_2 = \frac{10}{3},$$

de modo que a área total $S$ do tronco de cone é dada por

$$S = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi R_1 g_1 - \pi R_2 g_2 = 16\pi + \frac{64\pi}{9} + 20\pi - \frac{80\pi}{9} = \frac{308\pi}{9} \text{ cm}^2.$$

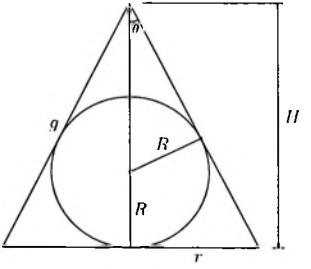
**Questão 21 (B):**




O volume de um tronco de um cilindro é proporcional à altura média de sua seção, que, no caso, é dada por $\frac{H+h}{2}$. Dobrando o valor de $h$, sem alterar o valor de $H$, a altura média passa a ser $\frac{H+2h}{2}$, de modo que devemos ter

$$\frac{H+2h}{2} = \frac{4}{3}\,\frac{H+h}{2} \Rightarrow 3H + 6h = 4H + 4h \Rightarrow H = 2h.$$

**Questão 22 (B):**




Sejam $r$, $g$ e $H$ o raio da base, a geratriz e a altura do cone, respectivamente, conforme ilustrado na figura acima, onde

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r}{H} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

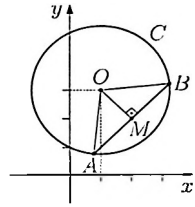
e assim

$$H = R + \frac{R}{\operatorname{sen}\theta} = (1+\sqrt{5})R \Rightarrow r = \frac{H}{2} = \frac{(1+\sqrt{5})R}{2} \Rightarrow g = \sqrt{H^2+r^2} = r\sqrt{5}.$$

Logo, a área lateral do cone é igual a

$$S_\ell = \pi r g = \pi r^2\sqrt{5} = \frac{\pi(1+\sqrt{5})^2 R^2\sqrt{5}}{4}\ \text{cm}^2.$$

**Questão 23 (D):**



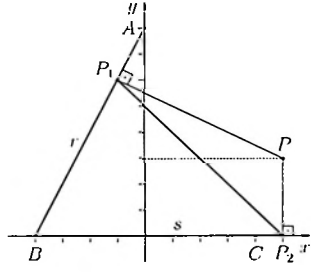

A cicunferência $C$ pode ser reescrita como

$$C : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

de modo que $C$ tem centro $O = (1,3)$ e raio $AO = BO = \sqrt{5}$. Com isso, o segmento $OM$ mede $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ e, pelo teorema de Pitágoras, o comprimento do segmento $AB$ é

$$AB = 2\sqrt{AO^2 - OM^2} = 2\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}.$$

**Questão 24 (A):**




Do enunciado, as retas $r$ e $s$ são descritas por

$$r : \begin{cases} 8 = \beta_r \\ 0 = -4\alpha_r + \beta_r \end{cases} \Rightarrow r : y = 2x + 8,$$

$$s : \begin{cases} 0 = -4\alpha_s + \beta_s \\ 0 = 4\alpha_s + \beta_s \end{cases} \Rightarrow s : y = 0.$$

Com isso as perpendiculares $p_r$ e $p_s$ às retas $r$ e $s$, respectivamente, traçadas por $P$, são descritas por

$$\begin{cases} p_r : y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \\ p_s : x = 5 \end{cases}$$

cujas respectivas interseções $P_1$ e $P_2$ com $r$ e $s$ são dadas por

$$P_1 : \begin{cases} y = 2x + 8 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow P_1 = (-1, 6),$$

$$P_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow P_2 = (5, 0),$$

e a reta $P_1P_2$ é descrita, então, por

$$\begin{cases} 6 = -\alpha_p + \beta_p \\ 0 = 5\alpha_p + \beta_p \end{cases} \Rightarrow P_1P_2 : y = -x + 5.$$

**Questão 25 (C):**

- Se $c = 2$ e $a = 6$, então $b = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$, e a equação da elipse com centro na origem e focos sobre o eixo $x$ é dada por

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

  e a afirmação I é verdadeira;

- Se $c = \sqrt{5}$ e $e = \frac{\sqrt{10}}{2}$, então $a = \frac{c}{e} = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$, e a equação da hipérbole co centro na origem e focos sobre o eixo $x$ é dada por

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2y^2 = 6.$$

  e a afirmação II é verdadeira;

- A parábola $2y = (x - 5)^2 - 125$, tem vértice no ponto $(5, -\frac{125}{2})$, e a afirmação III é falsa.

# II.23 Vestibular 1991

**Questão 01 (E):**

- Se $f(x)$ é par, então

$$g(f(-x)) = g(f(x)),$$

de modo que $g(f(x))$ é uma função par, e a afirmação I é verdadeira;

- Se $f(x)$ é par e $g(x)$ é ímpar, então

$$f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)).$$

de modo que $f(g(x))$ é uma função par, e a afirmação II é verdadeira;

- A função inversa $f^{-1}(x)$ de $f(x)$ é, por definição, tal que

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Assim, se $f(x)$ é ímpar, têm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(f(x)) \\ f^{-1}(f(-x)) = f^{-1}(-f(x)) \end{array} \right. \Rightarrow f^{-1}(-f(x)) = -f^{-1}(f(x)).$$

de modo que $f^{-1}(x)$ é ímpar, e a afirmação III é verdadeira.

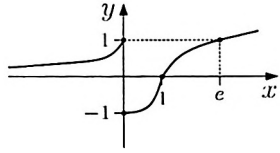
**Questão 02 (C):** Desenvolvendo $f(x)$, têm-se

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a^{2x}-1}{2a^x} &\Rightarrow a^{2x} - 2a^x f(x) - 1 = 0 \\ &\Rightarrow a^x = \frac{2f(x) \pm \sqrt{4f^2(x)+4}}{2} = f(x) \pm \sqrt{f^2(x)+1} \\ &\Rightarrow x = \log_a \left[ f(x) \pm \sqrt{f^2(x)+1} \right]. \end{aligned}$$

Eliminando a solução espúria associada ao sinal negativo, e substituindo $x \leftrightarrow f^{-1}(x)$ e $f(x) \leftrightarrow x$, têm-se

$$f^{-1}(x) = \log_a \left[ x + \sqrt{x^2+1} \right].$$

**Questão 03 (B):**




Pelo gráfico da função esboçado acima, um domínio $D$ tal que $f(x)$ seja injetora é dado por

$$D = ]-\infty, 1] \cup ]e, +\infty[.$$

para o qual $f(D) = ]-1, +\infty[$.

**sln:** Note que as opções (C) e (D) incluem simultaneamente os pontos em $x = 0$ e $x = e$, fazendo com que a função deixe de ser injetora nos respectivos intervalos, já que $f(0) = f(e) = 1$.

**Questão 04 (D):** Se $z = x + yi$, com $x$ e $y$ reais, têm-se

$$(a + bi)(x + yi) + (a - bi)(x - yi) + c = 0 \Rightarrow 2ax - 2by + c = 0.$$

o que, como $b \neq 0$, corresponde a uma reta com coeficiente angular $\frac{a}{b}$.

**Questão 05 (A):** Usando coordenadas polares, podemos escrever $z = e^{it}$ e

$$w = \frac{1 + e^{it}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \frac{\left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}}\right)}{\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)} = \frac{2\cos\frac{t}{2}}{-2i\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}} = i\,\mathrm{cotg}\,\frac{t}{2}.$$

**Questão 06 (C):** Sejam $r_1$, $r_2$ e $r_3$ as três raízes da equação dada, com $(r_1 + r_2) = 1$. Assim, das relações de Girard, têm-se

$$\begin{cases} (r_1+r_2)+r_3 = 6 \\ r_1r_2+r_3(r_1+r_2) = -m^2 \\ r_1r_2r_3 = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_3 = 5 \\ r_1r_2 = -(m^2+5) \\ -(m^2+5)5 = -30 \end{cases} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1.$$

**sln:** No caso,

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 1 \\ r_1r_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow r_{1,2} = 3 \text{ e } 2.$$

**Questão 07 (A):** Reescrevendo a equação dada, têm-se

$$3x(4x^2-1)-4(4x^2-1)=0 \Rightarrow (3x-4)(4x^2-1)=0$$
$$\Rightarrow S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right\}$$
$$\Rightarrow S\subset\ ]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,2[.$$

**Questão 08 (B):**

- Por inspeção, $x=1$ e $x=-1$ são raízes da equação, que pode ser decomposta da forma

$$(x^2-1)(3x^2-10x+3)=(x^2-1)[3(x-3)(x-\frac{1}{3})]=0.$$

e a afirmação I é verdadeira;

- A equação $x+1=0$ é recíproca de primeira espécie e possui um número ímpar (e, no caso, unitário) de raíz(es), e a afirmação II é falsa;
- Desenvolvendo a primeira equação, tem-se

$$x^2(x+4)-4(x+4)=(x^2-4)(x+4)=0.$$

de modo que suas raízes são $x=-4$, $x=-2$ e $x=2$. Já a segunda equação pode ser desenvolvida da forma

$$x^2(x+2)-(x+2)=(x^2-1)(x+2)=0.$$

cujas raízes são $x=-2$, $x=-1$ e $x=1$, e a afirmação III é verdadeira.

**Questão 09 (A):** Como

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq 0.\ \forall x.$$

então a desigualdade do enunciado pode ser desmembrada nos dois seguintes casos:

$$\begin{cases} x^2+2x-3\geq 0 \\ x^2+x+1\leq x^2+2x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-1)\geq 0 \\ x\geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq -3 \text{ ou } x\geq 1 \\ x\geq 4 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x^2+2x-3\leq 0 \\ x^2+x+1\leq -x^2-2x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-1)\leq 0 \\ 2(x+2)(x-\frac{1}{2})\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\leq x\leq 1 \\ -2\leq x\leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Assim, juntando todas as possibilidades, têm-se

$$-2\leq x\leq\frac{1}{2} \text{ ou } x\geq 4 \Rightarrow A=\left[-2,\frac{1}{2}\right]\cup[4,+\infty[.$$

**Questão 10 (B):** Escrevendo $P(x) = (x-1)Q(x) - 6$, têm-se

$$\begin{cases} b_4 = a_5 \\ b_3 - b_4 = 2 \\ b_2 - b_3 = a_4 \\ b_1 - b_2 = 8 \\ b_0 - b_1 = -32 \\ -6 - b_0 = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_4 = a_5 \\ b_3 = a_5 + 2 \\ b_2 = a_4 + a_5 + 2 \\ b_1 = a_4 + a_5 + 10 \\ b_0 = a_4 + a_5 - 22 \\ b_0 = -(6 + a_3) \end{cases}$$

Logo,

$$q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_2}{b_1} \Rightarrow q = \frac{a_5}{a_5+2} = \frac{a_5+2}{a_4+a_5+2} = \frac{a_4+a_5+2}{a_4+a_5+10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_5+2)^2 = a_5(a_4+a_5+2) \\ (a_4+a_5+2)^2 = (a_5+2)(a_4+a_5+10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_5(a_4-2) = 4 \\ a_4^2 + (a_4-8)(2+a_5) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_4^2 + (a_4-8)\left(2 + \frac{4}{a_4-2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow a_4^2(a_4-2) + (a_4-8)[2(a_4-2)+4] = 0$$

$$\Rightarrow a_4(a_4^2 - 16) = 0$$

$$\Rightarrow a_4 = -4, 0 \text{ ou } 4$$

$$\Rightarrow a_5 = \frac{4}{a_4-2} = -\frac{2}{3}, -2 \text{ ou } 2$$

$$\Rightarrow q = \frac{a_5}{a_5+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}.$$

pois $q > 0$. Assim, $a_5 = 2$, $a_4 = 4$ e então

$$b_4 = 2, b_3 = 4, b_2 = 8, b_1 = 16, b_0 = -16, a_3 = 10.$$

de modo que $b_4 + a_4 = 6$.

**Questão 11 (A):** Do enunciado,

$$\begin{cases} \ln a_1 \times \ln q = 24 \\ \ln a_2 + \ln a_3 = \ln(a_1 q) + \ln(a_1 q^2) = 2\ln a_1 - 3\ln q = 26 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(26 - 3\ln q)}{2} \times \ln q = 24$$

$$\Rightarrow 3\ln^2 q - 26\ln q + 48 = 0$$

$$\Rightarrow \ln q = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 576}}{6} = \frac{26 \pm 10}{6} = 6 \text{ ou } \frac{8}{3}.$$

de modo que $q = e^6$, pois $\ln q$ é inteiro, e assim $a_1 = e^4$, e o termo geral da progressão vale

$$a_n = a_1 q^{n-1} = e^4 \times e^{6(n-1)} = e^{6n-2}.$$

**Questão 12 (C):** Das propriedades básicas da função logaritmo. devemos ter $x > 0$, $(2x + 3) > 0$ e ainda

$$\begin{aligned} 3\log x + 3\log(2x + 3) \leq 3\log 2 &\Rightarrow \log x(2x + 3) < \log 2 \\ &\Rightarrow x(2x - 3) \leq 2 \\ &\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \\ &\Rightarrow 2(x + 2)(x - \frac{1}{2}) \leq 0 \\ &\Rightarrow -2 \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

de modo que, juntando todas as restrições, têm-se $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

**Questão 13 (E):** Das respectivas definições, têm-se

$$\begin{cases} A = (1 + 3)^n \\ B = (1 + 11)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \ln B - \ln A = \ln \frac{B}{A} = \ln \frac{12^{n-1}}{1^n} = \ln \frac{3^{n-1}}{1} = \ln \frac{6561}{1}.$$

e assim $3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 9$.

**Questão 14 (D):** Do enunciado, a escola possui 4 professores de outras disciplinas que não matemática, física ou química. Seja uma comissão caracterizada pela seguinte quadra ordenada $(M, F, Q, O)$, onde $M$ representa o número de professores de matemática na comissão, $F$ o de física, $Q$ o de química e $O$ o de outras disciplinas. Pelo enunciado, as comissões podem ser formadas das seguintes maneiras:

- $(5, 2, 1, 4)$: para a qual há $C_5^7 = 21$ possibilidades de escolha dos 5 professores de matemática, $C_2^3 = 3$ possibilidades para os 2 professores de física, $C_1^1 = 1$ possibilidades para o único professor de química e $C_4^4 = 1$ possibilidade para os 4 professores de outras disciplinas, totalizando $21 \times 3 \times 1 \times 1 = 252$ combinações nesse caso;
- $(5, 2, 2, 3)$: para a qual há um total de $C_5^7 \times C_2^3 \times C_2^1 \times C_3^4 = 21 \times 3 \times 6 \times 4 = 1512$ combinações;
- $(5, 3, 0, 4)$: para a qual há um total de $C_5^7 \times C_3^3 \times C_0^1 \times C_4^4 = 21 \times 1 \times 1 \times 1 = 21$ combinações;
- $(5, 3, 1, 3)$: para a qual há um total de $C_5^7 \times C_3^3 \times C_1^1 \times C_3^4 = 21 \times 1 \times 4 \times 4 = 336$ combinações;
- $(5, 3, 2, 2)$: para a qual há um total de $C_5^7 \times C_3^3 \times C_2^1 \times C_2^4 = 21 \times 1 \times 6 \times 6 = 756$ combinações.

Logo, há um total $T$ de

$$T = 252 + 1512 + 21 + 336 + 756 = 2877$$

comissões distintas satisfazendo as condições do enunciado.

**Questão 15 (C):** Do enunciado, devemos ter

$$\det(mA + nB) = \begin{vmatrix} (2m - n) & (m + n) \\ 3m & (5m + n) \end{vmatrix} = (2m - n)(5m + n) - 3m(m + n) = 0,$$

ou seja,

$$7m^2 - 6mn - n^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{14} n = \frac{6 \pm 8}{14} n = n \text{ ou } -\frac{n}{7},$$

de modo que $m = -\frac{n}{7}$, pois $m \neq n$, e assim, $m$ e $n$ têm sinais contrários.

**Questão 16 (D):** No caso,

$$B = M - M^{-1} = M - M^t \Rightarrow B^t = M^t - M = -B.$$

o que define uma matriz antissimétrica.

**Questão 17 (E):** Calculando o determinante $D$ da matriz característica do sistema, usando Laplace na segunda coluna, têm-se

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 & k^2 \\ 1 & 0 & (k+1) & 1 \\ 1 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (k+1) & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k(k^2 - k).$$

de modo que o sistema é possível e determinado quando $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

**Questão 18 (C):** Resolvendo o sistema auxiliar considerando a variável independente $t$, têm-se

$$\begin{cases} x - y + 2z = t \\ 3x + y + 3z = -t \\ x - y - z = 5t \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5t}{3}, y = -2t \text{ e } z = -\frac{4t}{3}.$$

de modo que

$$x + y - z + t = \frac{5t - 6t - 4t + 3t}{3} = -\frac{2t}{3}.$$

Logo, $(x + y + z + t)$ e $y$ têm o mesmo sinal.

**Questão 19 (A):** Aplicando a lei dos senos, têm-se

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 2R \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30° \text{ ou } 150°.$$

Como $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ formam uma progressão aritmética, então

$$\begin{cases} \hat{B} = \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2} \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = 30°, \hat{B} = 60°, \hat{C} = 90°.$$

e assim, novamente da lei dos senos,

$$\begin{cases} b = 2R \operatorname{sen} 60° = 6 \\ c = 2R \operatorname{sen} 90° = 4\sqrt{3} \end{cases}.$$

**Questão 20 (C):** Do enunciado,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{a-1}{a+1}}{\sqrt{1-\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2}} = \frac{a-1}{\sqrt{(a+1)^2-(a-1)^2}} = \frac{a-1}{2\sqrt{a}},$$

de modo que a expressão $E$ do enunciado equivale a

$$E = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{a-1}{a+1}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{a-1}{a+1}\right)\times\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)} = \frac{\frac{a-1}{2\sqrt{a}}+\frac{1}{2\sqrt{a}}}{1-\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\times\frac{1}{2\sqrt{a}}} = \frac{2a\sqrt{a}}{3a+1}.$$

**Questão 21 (B):** Observando, por inspeção, que $\cos x = 1$, que corresponde a $x = 0$, é raiz da equação, então essa pode ser decomposta como

$$(\cos x - 1)(\cos^2 x + a\cos x - b) = 0,$$

cujas demais raízes são tais que

$$\cos x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

Assim, para que haja outra raiz real no intervalo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, distinta de $x = 0$, então devemos ter

$$0 \leq \frac{\sqrt{a^2+4b}-a}{2} < 1 \Rightarrow \begin{cases} a \leq \sqrt{a^2+4b} \\ \sqrt{a^2+4b} < 2+a \end{cases} \Rightarrow 0 < b < a+1,$$

pois $b > 0$.

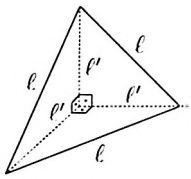
**Questão 22 (D):** A região em questão é o interior da circunferência

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1,$$

de raio $r = 1$ e centro $O = (1, -2)$, que pertence à reta $y + x + 1 = 0$. Assim, o sólido gerado pela rotação dessa região em torno da reta é composto de dois setores esféricos de raio $r = 1$ e ângulos $\frac{\pi}{3}$, de modo que o volume $V$ desse sólido é dado por

$$V = \frac{2\times\frac{\pi}{3}}{2\pi}\times\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{9}.$$

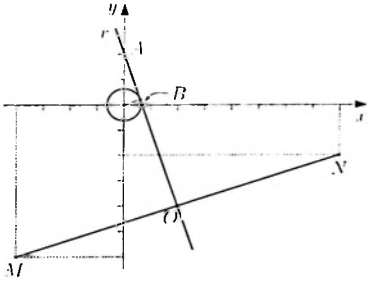
**Questão 23 (E):**




Por Pitágoras, a aresta da face lateral mede $\ell' = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$, de modo que o volume $V$ da pirâmide é dado por

$$V = \frac{\frac{\ell'^2}{2} \times \ell'}{3} = \frac{\ell'^3}{6} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{24}\ \text{cm}^3.$$

**Questão 24 (D):**



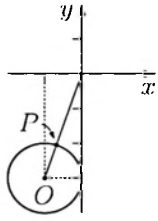

A reta $MN$ pode ser descrita por

$$MN: \begin{cases} -6 = -4\alpha + \beta \\ -2 = 8\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow MN: y = \frac{x}{3} - \frac{14}{3}.$$

e o ponto médio desse segmento é $O = \frac{M+N}{2} = (2, -4)$. Logo, a reta $r$, perpendicular a $MN$ e passando por $O$, é descrita por $r: y = -3x + 2$ e cruza os eixos cartesianos nos pontos $A = (0, 2)$ e $B = (\frac{2}{3}, 0)$. Com isso, o raio $R$ da circunferência, centrada na origem e tangente à reta $r$, é tal que

$$R = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{AB} = \frac{4}{3\sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

**Questão 25 (C):**




A equação da circunferência $C$ pode ser reescrita como

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 1,$$

de modo que seu centro é $O = (-1,-3)$ e seu raio é unitário. Logo, a reta que passa pela origem dos eixos cartesianos e pelo centro $O$ pode ser descrita por $y = 3x$, cujas interseções com a circunferência $C$ são

$$(x+1)^2 + 9(x+1)^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{10}}{10} - 1,$$

e o ponto $P$ de $C$ mais próximo da origem é tal que

$$a = \frac{\sqrt{10}}{10} - 1 \text{ e } b = 3a.$$

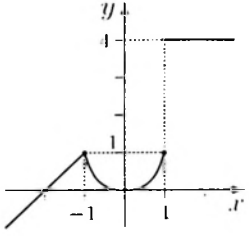
# II.24 Vestibular 1990

**Questão 01 (C):** Analisando a simetria das funções, têm-se

$$f(-x) = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{e^x+1}{e^x-1} = -f(x).$$
$$g(-x) = (-x)\operatorname{sen}(-x) = -(-x)\operatorname{sen} x = x\operatorname{sen} x = g(x),$$

de modo que $f(x)$ é uma função ímpar e $g(x)$ é uma função par.

**Questão 02 (C):**




Analisando o gráfico da função $f(x)$ esboçado acima, observamos que $f(x)$ não é nem sobrejetora (já que não há valor de $x$ tal que $f(x) = 2$, por exemplo), nem injetora (já que $f(-1) = f(1) = 1$). Além disso, têm-se

$$\begin{cases} f^{-1}([3,5]) = (1,+\infty) \\ f^{-1}([2,6]) = (1,+\infty) \\ f^{-1}([0,4]) = [-2,+\infty) \end{cases} \Rightarrow f^{-1}([3,5]) = f^{-1}([2,6]).$$

e as afirmações I e III são falsas, enquanto a afirmação II é verdadeira.

**Questão 03 (E):** Substituindo $x \leftrightarrow f^{-1}(x)$ e $f(x) \leftrightarrow x$, têm-se

$$x = \frac{2f^{-1}(x)-3}{f^{-1}(x)-2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{x-3},$$

com $x \neq 3$.

**Questão 04 (D):** Escrevendo $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, então as soluções da primeira equação são da forma

$$S_1 = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)}, e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, -i \right\},$$

que formam um triângulo equilátero inscrito no círculo de raio unitário do plano complexo com um dos vértices em $z = -i$.

Já as soluções da segunda equação são dadas por

$$z = \frac{-(2+i) \pm \sqrt{(2+i)^2 - 8}}{2} = \frac{-(2+i) + (2-i)}{2} = -2 \text{ ou } -i,$$

de modo que $S_1 \cap S_2 = \{-i\}$.

**Questão 05 (B):** Denotando $z = a + bi$, com $a$ e $b$ reais, devemos ter

$$1 + \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(1+a)^2+b^2} \Rightarrow 1 + 2\sqrt{a^2+b^2} + (a^2+b^2) = 1 + 2a + a^2 + b^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = a$$
$$\Rightarrow a \geq 0 \text{ e } b = 0.$$

**Questão 06 (C):** Como $p(x)$ tem coeficientes reais e uma raiz $(a+bi)$, com $b \neq 0$, então $(a-bi)$ também é raiz de $p(x)$. Além disso, como $p(x)$ tem mais de uma raiz real, então $p(x)$ tem três raízes reais, as quais denotaremos por $r_1$, $r_2$ e $r_3$, que formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{a}$. Do enunciado, têm-se

$$\begin{cases} r_1 r_2 r_3 = r_2^3 = \frac{1}{64} \\ r_1 + r_2 + r_3 = r_2(a + 1 + \frac{1}{a}) = \frac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}(a + 1 + \frac{1}{a}) = \frac{7}{8} \end{cases}$$

de modo que

$$2a^2 - 5a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2 \text{ ou } \frac{1}{2}.$$

Considerando $a = 2$ (a opção $a = \frac{1}{2}$ é equivalente, só alterando a ordem da progressão geométrica), por Girard, devemos ter

$$\begin{cases} \frac{7}{8} + (2+bi) + (2-bi) = \frac{7}{16} \\ r_2^2(a + 1 + \frac{1}{a})(2+bi)(2-bi) - r_2^3[(2-bi) + (2+bi)] = \frac{a}{16} \\ \frac{1}{64}(2+bi)(2-bi) = \frac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{8} + 4 = \frac{39}{8} \\ \frac{7}{8}(4+b^2) + \frac{4}{64} = \frac{a}{16} \\ \frac{1}{64}(4+b^2) = \frac{5}{16} \end{cases}.$$

e, consequentemente, $b = \pm 1$ e $a = 71$.

**Questão 07 (A):** Pela definição da função logaritmo e da desigualdade dada. devemos ter

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x > 0 \\ \ln(\operatorname{sen}^2 x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x > 0 \\ \operatorname{sen}^2 x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

para qualquer $k$ inteiro.

**Questão 08 (A):** Podemos decompor o polinômio $p(x) = 12x^3 - 19x^2 + 8x - 1$ da forma

$$p(x) = (3x - 1)(4x^2 - 5x + 1) = (3x - 1)(4x - 1)(x - 1).$$

de modo que as soluções da equação dada são tais que

$$3^x = \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ ou } 1 \Rightarrow x = -1, -\log_3 4 \text{ ou } 0.$$

cuja soma $S$ é

$$S = (-\log_3 3) + (-\log_3 4) + 0 = -\log_3 12.$$

**Questão 09 (D):** Sejam $r_1 = \frac{r_2}{q}$, $r_2$ e $r_3 = r_2 q$ os três termos da progressão geométrica dada de razão $q = e^{-2a} > 0$. Do enunciado, devemos ter

$$\begin{cases} \frac{r_2(q^2+q+1)}{q} = 7 \\ \frac{r_2(q^2-1)}{q} = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{q^2+q+1}{q^2-1} = \frac{7}{3} \Rightarrow 4q^2 - 3q - 10 = 0,$$

de modo que

$$q = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{8} = \frac{3 \pm 13}{8} = 2 \text{ ou } -\frac{10}{8},$$

e assim

$$e^{-2a} = 2 > 0 \Rightarrow a = -\ln\sqrt{2}.$$

**Questão 10 (C):** Analisando o intervalo de $x$ para o qual $|g(x)| < 1$, têm-se

$$\left|2 - \frac{1}{x-1}\right| < 1 \Rightarrow -3 < -\frac{1}{x-1} < -1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x-1} < 3 \Rightarrow \frac{4}{3} < x < 2.$$

Assim, a função composta $f(g(x))$ é tal que

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, \text{ se } \frac{4}{3} < x < 2 \\ 0, \text{ se } x \leq \frac{4}{3} \text{ ou } x > 2 \end{cases}.$$

**Questão 11 (D):** O termo independente de $x$ no desenvolvimento do binômio $\left[(\cos\alpha)x + (\operatorname{sen}\alpha)\frac{1}{x}\right]^8$ é tal que

$$\frac{8!}{4!\,4!}\cos^4\alpha\operatorname{sen}^4\alpha = \frac{35}{8} \Rightarrow 16\cos^4\alpha\operatorname{sen}^4\alpha = (2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)^4 = \operatorname{sen}^4 2\alpha = 1$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = \pm 1$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4},$$

pois $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**Questão 12 (D):** Como $a > 0$ e $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, então $x \geq 1$. Além disso,

$$y^2 = b^2\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) = \frac{b^2(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t} = \frac{b^2\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} = b^2\operatorname{tg}^2 t,$$

de modo que

$$y = \pm b\operatorname{tg} t = \pm b\left(\frac{x-1}{a^2}\right).$$

Assim, uma possível relação entre $x$ e $y$ é

$$y = -b\left(\frac{x-1}{a^2}\right),$$

com $x \geq 1$.

**Questão 13 (X):** Desenvolvendo a expressão dada em função de $\theta$, têm-se

$$2(\operatorname{sen}\theta\cos 60^\circ - \operatorname{sen}60^\circ\cos\theta) = \cos\theta\cos 60^\circ - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}60^\circ$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta - \sqrt{3}\cos\theta = \frac{1}{2}(\cos\theta - \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta)$$
$$\Rightarrow (2+\sqrt{3})\operatorname{sen}\theta = (1+2\sqrt{3})\cos\theta$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (1+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = -4+3\sqrt{3}.$$

de modo que $a = -4$ e $b = 3$, se assumirmos que $a$ e $b$ devem ser inteiros. Sem essa restrição, porém, há infinitos valores para $a$ e $b$, e a questão deveria ser anulada.

**Questão 14 (C):** Do enunciado,

$$\det A = 2(\operatorname{sen}^2 x - \log_3 10).$$

e como $0 < \operatorname{sen}^2 x \leq 1$ e $\log_3 10 > 2$, então $\det A \neq 0$ e a matriz $A$ é sempre inversível, para qualquer valor de $x$.

**Questão 15 (A):** Como $A$ e $B$ são inversíveis, então $C = (AB)^{-1}.A^t.A^{-1}$. Logo, pelas propriedades de determinantes de matrizes, têm-se

$$\det C = [\det (AB)^{-1}](\det A^t \times \det A^{-1}) = \det (AB)^{-1} \neq 0,$$

de modo que $C$ é inversível.

**Questão 16 (E):**

- Os sistemas podem ser indeterminados e apresentar soluções distintas, como por exemplo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases},$$

  e a afirmação I é falsa;

- Os sistemas podem ser indeterminados e equivalentes, como por exemplo:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases},$$

  e a afirmação II é falsa;

- No caso, o primeiro sistema é determinado com solução $(x, y, z) = (2, 3, 5)$, enquanto o segundo sistema não tem qualquer solução, e a afirmação III é falsa.

**Questão 17 (E):** Subtraindo a primeira linha das demais, o sistema torna-se

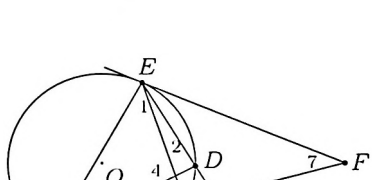
$$\begin{cases} a_1 x_1 + (a_1 + 1)x_2 + \ldots + (a_1 + n - 1)x_n = 0 \\ (a_2 - a_1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0 \\ \ldots \\ (a_n - a_1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0 \end{cases},$$

que, para $n > 2$, é indeterminado quaisquer que sejam as constantes $a_i$.

**Questão 18 (B):** Seja $k_0$ a quantidade inicial de moedas no baú. Desse modo, o primeiro marinheiro dividiu as moedas em dois lotes de $k_1 = \frac{k_0-1}{2}$ moedas cada um; o segundo marinheiro dividiu um desses lotes em dois lotes de $k_2 = \frac{k_1-1}{2} = \frac{k_0-3}{4}$ moedas cada um; por fim, o imediato dividiu um desses lotes em outros dois, cada um com $k_3 = \frac{k_2-1}{2} = \frac{k_0-7}{8}$ moedas. Assim, o primeiro marinheiro recebeu $m_1 = (k_1 + k_3)$ moedas enquanto o segundo marinheiro recebeu $m_2 = (k_2 + k_3)$ moedas, de modo que

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1 + k_3}{k_2 + k_3} = \frac{\frac{k_0-1}{2} + \frac{k_0-7}{8}}{\frac{k_0-3}{4} + \frac{k_0-7}{8}} = \frac{5k_0 - 11}{3k_0 - 13} = \frac{29}{17} \Rightarrow k_0 = 95.$$

**Questão 19 (D):**




Seja $G$ a interseção de $EB$ com $AD$, de modo que no triângulo $\Delta AEG$ tem-se

$$\hat{4} = A\hat{G}E = 180^\circ - (\hat{1} + \hat{3}) = 180^\circ - 83^\circ = 97^\circ.$$

Além disso, no triângulo $\Delta ADE$, tem-se

$$A\hat{D}E = 180^\circ - (\hat{1} + \hat{2} + \hat{3}) = 180^\circ - 101^\circ = 79^\circ,$$

e como os ângulos $A\hat{D}E$ e $\hat{5}$ sub-entendem o mesmo arco $\overset{\frown}{AE}$, então $\hat{5} = A\hat{D}E = 79^\circ$.

Como os ângulos $B\hat{A}G$ e $\hat{2}$ sub-entendem o mesmo arco $\overset{\frown}{BD}$, então $B\hat{A}G = \hat{2} = 18^\circ$, de modo que no triângulo $\Delta ACE$ podemos determinar

$$\hat{6} = 180^\circ - (\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + B\hat{A}G) = 180^\circ - 119^\circ = 61^\circ.$$

Por fim, no triângulo $\Delta AEO$, têm-se

$$\begin{cases} OA = OE \\ AOE = 2 \times \hat{5} = 158^\circ \end{cases} \Rightarrow O\hat{E}A = O\hat{A}E = \frac{180^\circ - 158^\circ}{2} = 11^\circ.$$

Com isso, $O\hat{E}B = (\hat{1} - O\hat{E}A) = 38^\circ$, e, consequentemente, $C\hat{E}F = 90^\circ - (OEB + \hat{2}) = 34^\circ$. Logo, no triângulo $\Delta CEF$,

$$\hat{7} = 180^\circ - [C\hat{E}F + (180^\circ - \hat{6})] = 180^\circ - (34^\circ + 119^\circ) = 27^\circ.$$

**Questão 20 (A):** Como as retas $r$ e $s$ são paralelas, os centros das circunferências que tangenciam $r$ e $s$ estão sobre uma outra reta $t$, paralela e no meio de $r$ e $s$, tal que

$$t = \frac{r+s}{2} = 3x - 4y + 8.$$

**Questão 21 (E):** A circunferência dada por ser escrita como

$$x^2 + (y - 3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18.$$

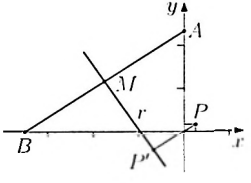
de modo que $C = (0, 3\sqrt{2})$ e $A$ e $B$ são tais que

$$x^2 + (\sqrt{2}x)^2 - 6\sqrt{2}(\sqrt{2}x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow A = (0,0) \text{ e } B = (4, 4\sqrt{2}).$$

Com isso,

$$\begin{cases} AB = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{3} \\ AC = 3\sqrt{2} \\ BC = \sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AB + AC + BC = 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}.$$

**Questão 22 (B):**




Os pontos em que a reta $2x - 3y + 7 = 0$ intercepta os eixos coordenados são $A = (0, \frac{7}{3})$ e $B = (-\frac{7}{2}, 0)$, de modo que seu ponto médio é $M = (-\frac{7}{4}, \frac{7}{6})$ e a mediatriz $r$ é descrita por

$$r : y = -\frac{3}{2}x - \frac{35}{24}.$$

A reta $p$, perpendicular a $r$ que passa pelo ponto $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ dado, é descrita por $p : y = \frac{2}{3}x$, e sua interseção $P'$ com $r$ é dada por

$$\begin{cases} r : y = -\frac{3}{2}x - \frac{35}{24} \\ p : y = \frac{2}{3}x \end{cases} \Rightarrow P' = (-\frac{35}{52}, -\frac{35}{78}).$$

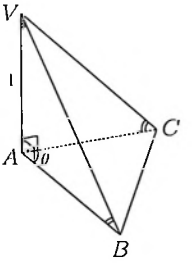
Assim, a distância desejada é dada por

$$PP' = \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{35}{52}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{35}{78}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{48}{52}\right)^2 + \left(\frac{48}{78}\right)^2} = \frac{4}{13}\sqrt{13}.$$

**Questão 23 (C):** O triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo. Assim, o triângulo $\Delta ABC$ é retângulo com hipotenusa proporcional a 5 e igual ao diâmetro $2x$ do círculo circunscrito. Dessa forma, o menor lado do triângulo $\Delta ABC$ é dado por $3 \times \frac{2x}{5} = \frac{6x}{5}$, e o volume $V$ do prisma é igual a

$$V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{6x}{5} = \frac{3x^3\sqrt{3}}{10} \text{ cm}^3.$$

**Questão 24 (A):**




Do enunciado, $A\hat{V}B = A\hat{B}V = A\hat{V}C = A\hat{C}V = 45°$. Logo, $AV = AB = AC = 1$ e ainda $VB = VC = \sqrt{2}$.

Assim, aplicando a lei dos cossenos no triângulo $\Delta VBC$, têm-se

$$BC^2 = VB^2 + VC^2 - 2VB \times VC \cos 45° = 2 + 2 - 2\sqrt{2} \Rightarrow BC = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}.$$

Aplicando, agora, a lei dos cossenos no triângulo $\Delta ABC$, tem-se

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{1 + 1 - (4 - 2\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} - 1$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}.$$

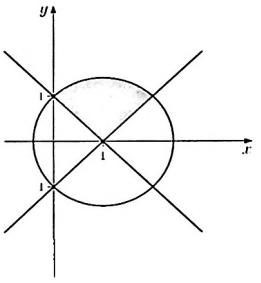
de modo que a área $S$ do triângulo $\Delta ABC$ é igual a

$$S = \frac{AB \times AC \operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{2};$$

e o volume $V$ da pirâmide é dado por

$$V = \frac{S \times AV}{3} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{6} \text{ cm}^3.$$

**Questão 25 (B):**




O sólido gerado pela rotação da região sombreada na figura acima em torno do eixo $x$ é a esfera de raio $r_1 = \sqrt{2}$, igual ao da circunferência dada, subtraída de duas calotas iguais, de altura $h_1 = (\sqrt{2} - 1)$ cada uma, e subtraída ainda de dois cones iguais, opostos pelo vértice, de raio da base $r_2 = 1$ e altura $h_2 = 1$. Assim, o volume $V$ desse sólido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi r_1^3}{3} - 2 \times \frac{\pi h_1^2 (3r_1 - h_1)}{3} - 2 \times \frac{\pi r_2^2 h_2}{3} \\ &= \frac{8\pi\sqrt{2}}{3} - \frac{2\pi(\sqrt{2} - 1)^2[3\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)]}{3} - \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

# Parte III

# Respostas Propostas

## III.1 Anos 2010-2013

| Questão | 2013 | 2012 | 2011 | 2010 |
|---|---|---|---|---|
| 01 | (C) | (D) | (B) | (E) |
| 02 | (C) | (D) | (C) | (C) |
| 03 | (B) | (B) | (E) | (E) |
| 04 | (D) | (E) | (X) | (C) |
| 05 | (A) | (E) | (A) | (D) |
| 06 | (E) | (C) | (B) | (D) |
| 07 | (A) | (A) | (E) | (B) |
| 08 | (C) | (C) | (C) | (C) |
| 09 | (D) | (A) | (A) | (A) |
| 10 | (B) | (B) | (A) | (E) |
| 11 | (E) | (D) | (D) | (B) |
| 12 | (D) | (E) | (E) | (A) |
| 13 | (C) | (C) | (D) | (D) |
| 14 | (E) | (A) | (C) | (C) |
| 15 | (A) | (C) | (D) | (A) |
| 16 | (B) | (B) | (C) | (B) |
| 17 | (B) | (B) | (B) | (A) |
| 18 | (D) | (E) | (A) | (D) |
| 19 | (A) | (D) | (E) | (E) |
| 20 | (B) | (A) | (C) | (B) |

## III.2 Anos 2000-2009

| Questão | 2009 | 2008 | 2007 | 2006 | 2005 | 2004 | 2003 | 2002 | 2001 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 | (C) | (A) | (D) | (D) | (B) | (C) | (A) | (D) | (D) | (E) |
| 02 | (B) | (B) | (X) | (C) | (D) | (D) | (D) | (E) | (B) | (D) |
| 03 | (E) | (A) | (B) | (B) | (D) | (C) | (C) | (E) | (C) | (B) |
| 04 | (B) | (D) | (E) | (E) | (B) | (B) | (A) | (D) | (A) | (A) |
| 05 | (E) | (B) | (D) | (C) | (D) | (A) | (C) | (B) | (A) | (C) |
| 06 | (C) | (E) | (C) | (A) | (C) | (A) | (E) | (D) | (B) | (C) |
| 07 | (A) | (D) | (A) | (B) | (C) | (B) | (D) | (B) | (E) | (D) |
| 08 | (B) | (A) | (E) | (C) | (C) | (E) | (B) | (A) | (E) | (A) |
| 09 | (E) | (C) | (B) | (D) | (E) | (E) | (A) | (X) | (A) | (E) |
| 10 | (D) | (E) | (B) | (B) | (A) | (D) | (C) | (D) | (C) | (B) |
| 11 | (A) | (B) | (D) | (A) | (A) | (A) | (D) | (D) | (B) | (B) |
| 12 | (B) | (E) | (E) | (D) | (B) | (D) | (A) | (E) | (B) | (D) |
| 13 | (E) | (C) | (D) | (E) | (A) | (D) | (B) | (E) | (E) | (C) |
| 14 | (D) | (D) | (C) | (E) | (E) | (B) | (E) | (D) | (B) | (E) |
| 15 | (D) | (C) | (C) | (E) | (B) | (B) | (C) | (A) | (E) | (D) |
| 16 | (E) | (E) | (A) | (D) | (C) | (C) | (B) | (A) | (D) | (E) |
| 17 | (A) | (A) | (A) | (B) | (D) | (A) | (B) | (B) | (D) | (C) |
| 18 | (B) | (D) | (B) | (X) | (A) | (E) | (D) | (X) | (C) | (C) |
| 19 | (A) | (C) | (E) | (D) | (E) | (C) | (C) | (A) | (A) | (A) |
| 20 | (C) | (B) | (C) | (A) | (X) | (E) | (B) | (C) | (A) | (B) |
| 21 | – | – | – | – | – | – | – | – | (D) | (A) |
| 22 | – | – | – | – | – | – | – | – | (C) | (E) |
| 23 | – | – | – | – | – | – | – | – | (C) | (B) |
| 24 | – | – | – | – | – | – | – | – | (C) | (D) |
| 25 | – | – | – | – | – | – | – | – | (D) | (A) |

# III.3 Anos 1990-1999

| Questão | 1999 | 1998 | 1997 | 1996 | 1995 | 1994 | 1993 | 1992 | 1991 | 1990 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 | (E) | (C) | (C) | (B) | (C) | (C) | (A) | (C) | (E) | (C) |
| 02 | (D) | (D) | (C) | (A) | (D) | (B) | (C) | (A) | (C) | (C) |
| 03 | (E) | (A) | (E) | (C) | (E) | (E) | (E) | (A) | (B) | (E) |
| 04 | (C) | (D) | (A) | (B) | (B) | (D) | (D) | (X) | (D) | (D) |
| 05 | (B) | (B) | (A) | (B) | (A) | (D) | (E) | (D) | (A) | (B) |
| 06 | (D) | (C) | (B) | (C) | (C) | (B) | (B) | (E) | (C) | (C) |
| 07 | (D) | (E) | (C) | (B) | (D) | (A) | (B) | (C) | (A) | (A) |
| 08 | (C) | (D) | (X) | (A) | (E) | (C) | (C) | (C) | (B) | (A) |
| 09 | (B) | (C) | (C) | (D) | (B) | (E) | (A) | (E) | (A) | (D) |
| 10 | (A) | (D) | (D) | (E) | (B) | (D) | (B) | (B) | (B) | (C) |
| 11 | (B) | (E) | (C) | (E) | (C) | (C) | (D) | (C) | (A) | (D) |
| 12 | (C) | (A) | (D) | (D) | (A) | (E) | (A) | (B) | (C) | (D) |
| 13 | (E) | (D) | (D) | (C) | (B) | (B) | (A) | (C) | (E) | (X) |
| 14 | (A) | (C) | (A) | (E) | (E) | (C) | (D) | (D) | (D) | (C) |
| 15 | (C) | (A) | (B) | (D) | (D) | (A) | (B) | (E) | (C) | (A) |
| 16 | (E) | (B) | (D) | (C) | (C) | (A) | (D) | (B) | (D) | (E) |
| 17 | (D) | (C) | (A) | (B) | (A) | (E) | (D) | (D) | (E) | (E) |
| 18 | (C) | (A) | (E) | (C) | (C) | (B) | (X) | (D) | (C) | (B) |
| 19 | (C) | (B) | (E) | (E) | (D) | (B) | (C) | (A) | (A) | (D) |
| 20 | (A) | (B) | (E) | (A) | (A) | (X) | (E) | (B) | (C) | (A) |
| 21 | (A) | (E) | (D) | (C) | (E) | (C) | (D) | (B) | (B) | (E) |
| 22 | (A) | (B) | (D) | (A) | (A) | (D) | (B) | (B) | (D) | (B) |
| 23 | (C) | (C) | (A) | (B) | (B) | (A) | (B) | (D) | (E) | (C) |
| 24 | (B) | (E) | (B) | (C) | (D) | (E) | (C) | (A) | (D) | (A) |
| 25 | (A) | (D) | (B) | (E) | (E) | (A) | (E) | (C) | (C) | (B) |

Esse livro contém as provas de Matemática do vestibular do ITA coletadas pelo Prof. Sergio, num processo de busca quase arqueológica, cobrindo a Internet, algumas visitas à Biblioteca Nacional e contando ainda com a valiosa ajuda de diversos colaboradores.

No total, 52 enunciados de provas são aqui incluídos, cobrindo todo o período de 1971 a 2013, além de alguns enunciados mais antigos das décadas de 1950 e 1960.

Soluções elaboradas pelo próprio Prof. Sergio são apresentadas para todas as provas do período de 1990 a 2013, inclusive. Pela abrangência e clareza de seu conteúdo, este livro pode ser visto como uma ferramenta indispensável para todos os estudantes e professores do segmento IME e ITA.

ISBN 856065321-X
9 788560 653218

LIVRARIA VestSeller
www.vestseller.com.br